# ATTI
# DEL CONGRESSO INTERNAZIONALE DEI MATEMATICI

BOLOGNA 3-10 SETTEMBRE 1928 (VI)

TOMO I

N. ZANICHELLI
BOLOGNA

# ATTI

DEL

# CONGRESSO INTERNAZIONALE DEI MATEMATICI

BOLOGNA 3-10 SETTEMBRE 1928 (VI)

TOMO I.

RENDICONTO DEL CONGRESSO

CONFERENZE

BOLOGNA

NICOLA ZANICHELLI

EDITORE

Bologna, Società Tipografica già Compositori - 1929 - VII

# RELAZIONE DEL CONGRESSO

PREPARAZIONE

AUTORITÀ - COMITATI - UFFIZI - CONGRESSISTI

PROGRAMMA E SVOLGIMENTO

PROCESSI VERBALI DELLE SEDUTE

# PREPARAZIONE

La serie dei Congressi Internazionali di Matematica, iniziata a Zurigo nel 1897, interrotta durante la guerra, fu ripresa coi Congressi di Strasburgo del 1920 e di Toronto del 1924, indetti dalla Unione Matematica Internazionale (emanazione del Consiglio Internazionale delle Ricerche), con esclusione degli scienziati di nazionalità germanica, bulgara, austriaca ed ungherese.

Nella seduta del 15 agosto 1924, tenuta a Toronto dai delegati della Unione Matematica Internazionale, veniva presentata dai delegati degli Stati Uniti della America la seguente mozione:

« The American Section of the International Union request the International » Research Council to consider whether the time us ripe for the removal of » restrictions on membership now imposed by the rules of the Council ».

Quella mozione fu appoggiata dalla Italia, dalla Danimarca, dalla Olanda, dalla Svezia, dalla Norvegia e dalla Gran Bretagna.

In quella stessa seduta veniva eletto a presidente della Unione Internazionale il prof. S. Pincherle, presidente della Unione Matematica Italiana, e si decideva che la sede del Congresso futuro, che doveva aver luogo nel 1928, fosse fissata per decisione dell' Ufficio di Presidenza della Unione Internazionale entro l'anno 1926.

La scelta cadde su la città di Bologna, e questa designazione fu comunicata dal Segretario Generale della Unione Internazionale con circolare del novembre 1926.

Frattanto il Consiglio Internazionale delle Ricerche, nella seduta del 29 giugno 1926, aveva deliberato di toglier ogni restrizione all' ammissione, fra le Unioni facenti capo ad esso, degli Stati fino allora non aderenti, ed aveva invitato la Germania, l'Austria, la Bulgaria e l'Ungheria a partecipare al Consiglio (1).

La presidenza della Unione Matematica Italiana, cui toccò il grave compito della preparazione del Congresso, stabilì perciò di riprendere le tradizioni dei Congressi Internazionali dell' ante-guerra, col togliere ogni esclusione dipendente da

(1) « L'Assemblée générale a decidé, en séance plénière du 29 juin 1926, d'inviter l'Allemagne, l'Autriche, la Bulgarie, et la Hongrie à faire partie du Conseil International des Recherches et des organisations intellectuelles qui y sont rattachées ».

ragioni politiche, pose il futuro Congresso sotto gli auspici della Università di Bologna, e ne affidò la organizzazione ad un Comitato locale, composto di professori della Università stessa e di cospicue personalità cittadine.

Questo Comitato si costituì nella seduta del 18 gennaio 1927, nominando a Presidente il Rettore pro-tempore della R. Università di Bologna, a Segretario il prof. Ettore Bortolotti, a Tesoriere Economo il comm. G. Borsari, direttore di segreteria della R. Università di Bologna; nominò nel suo seno una Commissione Esecutiva, con a capo il prof. Pincherle, Presidente della Unione Matematica Italiana e della Union Mathématique Internationale e deliberò di richiedere l'alto patronato di S. M. il Re d'Italia e la presidenza d'onore di S. E. il Capo del Governo.

Entrambe queste richieste ebbero graziosa, favorevole accoglienza.

La Commissione Esecutiva riconobbe come essenziali i seguenti punti:

1° - Istituire rapporti di cordiale colleganza con tutte le principali associazioni, accademie, istituzioni scientifiche di ogni paese, per ottenere da esse adesione, collaborazione, appoggio, e per assicurare al Congresso l'intervento degli scienziati più illustri.

2° - Organizzare i lavori scientifici.

3° - Preparare degna e ospitale accoglienza ai Congressisti ed alle loro famiglie.

4° - Provvedere i fondi occorrenti alla preparazione e allo svolgimento del Congresso ed alla stampa degli Atti.

## Rapporti con gli Istituti scientifici.

Per quel che riguarda il primo punto, la Commissione Esecutiva divulgò anzitutto una *Notificazione preliminare*, per annunciare il Congresso, il luogo, la data, le sezioni e gli argomenti. Tale notificazione, redatta in cinque lingue e spedita, insieme con opportune lettere di accompagnamento, ai presidenti ed ai segretari di tutte le Istituzioni scientifiche di tutti i paesi ove si coltivano le scienze matematiche, trovò dovunque favorevolissima accoglienza. Su l'esempio delle Società matematiche americane, tutte le società ed accademie interpellate si offrirono di distribuire ai loro soci sia la notificazione annunciata, sia ogni ulteriore comunicazione, e di pubblicare nei loro *Atti* le notizie riguardanti il Congresso.

Di ogni circolare furono così distribuite circa diecimila esemplari, e si può ben dire che, in ogni parte del mondo dove esisteva una scuola matematica, giungeva notizia del Congresso di Bologna.

Anche la maggior società matematica tedesca, la Deutsche mathematische Vereinigung, distribuì ai suoi soci la « Notificazione preliminare », compiegata in un fascicolo dei suoi *Jahresberichte.*

Tuttavia presto sorgeva una viva opposizione da parte di alcuni pochi, ma autorevoli rappresentanti della scienza tedesca, che, rivangando tristi episodi dell'immediato dopo-guerra, credevano di vedere, nelle relazioni della *Union Mathématique Internationale* (da cui il congresso era stato indetto) col *Conseil International des Recherches*, una dipendenza politica da gruppi nazionalisti a loro avversi, ai quali attribuivano il partito preso di *boicottare la scienza tedesca.*

Queste proteste misero il campo a rumore, non solo nei paesi di nazionalità tedesca, ma anche in quelli che in guerra furono neutrali, e la loro eco si estese alla Inghilterra ed alla America, cagionando non trascurabile pericolo alla riuscita del Congresso; poichè dalla Olanda, dalla Danimarca, dalla Svezia, dai gruppi più autorizzati della Inghilterra e degli Stati Uniti, si era fatto sapere, in modo formale, alla presidenza della Commissione Esecutiva, che non si sarebbero più oltre tollerate esclusioni di natura politica, e che un Congresso che non fosse stato internazionale, nel senso più assoluto della parola, avrebbe incontrato generale astensione.

Non fu opera facile nè breve il vincere quelle mal fondate diffidenze. A ciò giovarono, oltre ai privati colloqui con alcuni dei più autorevoli scienziati che visitarono la nostra città, la larga ed ininterrotta corrispondenza epistolare, le circolari che preannunziavano nei loro più significanti particolari lo svolgimento del futuro Congresso, gli inviti che, senza distinzione di nazionalità, venivano fatti alle accademie ed alle società scientifiche di tutto il mondo, avvisi emanati dal Rettore magnifico della R. Università di Bologna, personalità estranea e superiore ad ogni influenza politica: infine, la eletta schiera di scienziati stranieri che accettavano cordialmente l'invito di trattare questioni di interesse generale nelle conferenze a sezioni riunite.

Quando la burrasca pareva passata, veniva da parte opposta una più temibile minaccia.

Le disposizioni regolamentari che nell'immediato dopo-guerra erano state stabilite per l'Unione Matematica Internazionale, non autorizzavano ad invitare a Congressi Internazionali altro che: « des groupements scientifiques émanants de pays adhérents au Conseil International des Recherches ». Queste disposizioni, che erano già state superate nel Congresso di Toronto, cui, senza opposizione alcuna, avevano partecipato aggruppamenti scientifici, ed erano state inviate delegazioni ufficiali, da parte di nazioni non aderenti al Consiglio Internazionale, quali la Russia, la Spagna, l'India, e la Georgia (1), furono invece

(1) Cfr. Proceedings of the International Mat. Congress, held in Toronto.... Vol. I, pp. 21, 23, 25, 26, 65.

richiamate, e nel tono più perentorio, quando si seppe che le convocazioni fatte dal Presidente del Comitato ordinatore per il futuro Congresso di Bologna, erano state estese anche alla Germania, paese che ancora non aveva risposto all'invito di aderire al Consiglio Internazionale.

« Ce manquement grave (scriveva il Segretario Generale della Unione Internazionale nella lettera 29 maggio 1928 al Presidente della Commissione Esecutiva) rend illégales toutes ces convocations....

« Dans les conditions où ces convocations ont été faites, on ne peut plus » dire que le Congrès de Bologne est un Congrès relevant de l'Union Inter» nationale Mathématique.

» En conséquence, et après en avoir conféré avec Monsieur le Président du » Conseil International des Recherches, il m'est impossible de convoquer nos » adhérents au Congrès que l'Université de Bologne aura organisé dans cette » ville sous la présidence de son Recteur. De plus, pour éclairer nos adhérents » et leur faire connaître le véritable état des choses, je leur expédierai copie » de votre lettre du 26 avril et de la présente réponse ».

In risposta a questa protesta, il Presidente della Commissione Esecutiva (Presidente anche della Union Mathématique Internationale) indirizzava al Presidente del C. I. d. R. (prof. É. Picard di Parigi) una lettera (1) che esponeva

---

(1) *Bologne, le 8 Juin 1928 (VI).*

*Monsieur et illustre Maître,*

*Il est de mon devoir de vous informer avec quelque détail de la façon dont procède l'organisation du prochain Congrès international des Mathématiciens, et des graves difficultés qui se sont présentées au cours de la période préparatoire et qui menaçaient d'en compromettre sérieusement la réussite.*

*Il n'a pas été possible de s'en tenir aux idées directrices de Strasbourg et de Toronto. L'état des esprits n'est plus, dans le monde entier, celui du lendemain de la guerre; des motifs qui pouvaient s'imposer alors ne sont plus compris par beaucoup de jeunes savants qui se sont affirmés depuis. La correspondance écrasante à laquelle je suis obligé depuis deux ans m'en a fourni la preuve la plus évidente. De la Hollande, du Danemark, de la Suède, de la part de groupes des plus autorisés de l'Angleterre et des États-Unis, on m'a fait savoir, de la façon la plus absolue, qu'un Congrès qui ne serait pas international au sens le plus large du mot porterait à une abstention générale de leur part. Tel est aussi le point de vue de la grande majorité de mes collègues italiens; à cet avis s'est rangé aussi notre Gouvernement national, dont le Chef accorde au Congrès son appui moral et matériel.*

*D'ailleurs, on insiste de toutes parts sur ce point: Si l'on veut rétablir entre les savants qui cultivent la plus pure de toutes les sciences l'entente si nécessaire à ses progrès, si l'on veut une rencontre qui leur permette d'aviser aux moyens d'établir cette entente, il est nécessaire de passer par dessus des considérations de forme: le moment est tel que les promoteurs doivent se montrer assez persuadés de cette vérité et assez supérieurs pour passer outre, et donner au Congrès une forme qui permette cette rencontre. Toute autre façon de procéder ne manquerait pas de susciter contre l'Union d'acerbes critiques de la part de la majorité*

nel modo più esplicito, e nel tempo stesso giustificava la linea di condotta tenuta dagli organizzatori del Congresso. Ma la risposta del Presidente del C. I. d. R. confermava, sia pure con qualche attenuazione di forma, le dichiarazioni del Segretario Generale.

Questi contrasti non fecero menomamente deviare dalla prefissata linea di condotta la preparazione del Congresso, alla quale d'altronde, prima d'allora, nè la Unione Internazionale Matematica, nè il Consiglio Internazionale delle Ricerche avevano in nessun modo partecipato. Sotto gli auspici della Università di Bologna, il Comitato Ordinatore perseverò nella sua opera, intesa alla rappacificazione degli animi, al ravvicinamento degli scienziati dei paesi che la guerra aveva divisi, ed al ristabilimento di quelle cordiali relazioni di colleganza, tradizionali fra matematici nei Congressi dell'ante-guerra.

Nè maggior turbamento recò la divulgazione di una lettera circolare, pubblicata pochi giorni prima dell'apertura del Congresso da un distinto scienziato, ma pervicace oppositore (di nazionalità non tedesca) per alienare dal Congresso i fautori di parte tedesca; lettera che richiamava le frasi con le quali, in un

---

*des savants de nationalités neutres ou ex-alliées. Cherchez, nous dit-on de toutes parts, de résoudre la situation, et le but supérieur justifiera bien quelque dérogation à des articles d'une convention nécessairement précaire!*

*Ces idées, que mes collaborateurs italiens partagent entièrement, nous ont obligés à chercher un tempérament qui serve aussi à éviter à l'Union un résultat qui constituirait un véritable échec. Pour ces motifs, nous avons adopté une ligne de conduite que je me permets de vous indiquer.*

*Du moment que le Bureau de l'Union a désigné Bologne comme siège du Congrès, son Université, qui est, avec celle de Paris, la plus ancienne de la chrétienté, et qui jouit depuis le XI^e^ Siècle d'une renommée incontestable, s'est crue en devoir d'en assumer l'organisation et d'y inviter les savants du monde entier. Nous avons accueilli bien volentiers une forme qui permettait de surmonter, d'une façon acceptable pour tout le monde, les graves difficultés que j'ai indiquées plus haut, et le nombre et la qualité des adhésions reçues de toutes parts assurent désormais au Congrès une importance de premier ordre. Je ne sais si de cette façon on manque à quelque article d'un statut dont je n'ai d'ailleurs jamais eu communication officielle: mais un échec éventuel du Congrès (échec que les consentements que nous recevons de tous côtés rendent bien improbable) ne saurait être imputé à l'Union, dont les délegués tiendront, pendant le Congrès, leur réunion quadriennale, et où ils fixeront la conduite à suivre pour l'avenir.*

*Je sais que je m'adresse, non seulement à un savant hors ligne, mais encore à une personnalité éminente par la largeur des vues et par la noblesse du caractère; je ne doute pas que, même en faisant violence à des sentiments intimes que nous partageons, il ne désapprouvera pas une ligne de conduite que les circonstances ont imposée. S'il en est ainsi, nous espérons, avec une foi à laquelle il nous coûterait trop de renoncer, que ce sera Émile Picard qui ouvrira le cycle des conférences du Congrès. Mais si ce consentement devait nous manquer, je me soumettrai au jugement que, durant le Congrès, sera porté, par qui de droit, sur ma conduite.*

*Votre bien respectueusement dévoué* S. PINCHERLE

tempo ormai trapassato, era stato bandito l'ostracismo dai Congressi Internazionali della scienza tedesca:

« Angesichts dieser Worte (concludeva quello scritto) möge jeder Mathemati-
» ker für sich erwägen inwiefern Teilnahme am geplanten Kongress ohne Ver-
» höhnung des Andenkens von Gauss und Riemann des kulturellen Charakters
» der mathematischen Wissenschaft und der Unahängigkeit des menschlichen
» Geistes möglich ist ».

Ma, nonostante queste opposizioni, gli sforzi del Comitato Ordinatore per raggiungere lo scopo riuscirono appieno, al punto di superare l'aspettativa.

L'opera svolta in contrario non impedì infatti che la nazione Germanica avesse a Bologna la rappresentanza più numerosa (dopo quella Italiana) fra le intervenute al Congresso; nello stesso modo che la interdizione del C. I. d. R. e del Segretariato Generale della U. Int. M. non potè impedire che 15 fra le 19 nazioni aderenti al C. I. d. R. fossero rappresentate al Congresso e che ben 209 delle Istituzioni scientifiche e 22 degli Stati convocati a nome del Rettore della Università di Bologna, si facessero rappresentare da delegati ufficialmente nominati; ed, infine, che più di 1100 congressisti convenissero a Bologna da ogni parte del mondo! Ma gli episodi testè ricordati danno idea delle difficoltà che la organizzazione del Congresso ha dovuto affrontare per superare la crisi di passaggio dal regime ristretto di esclusioni nazionalistiche, che la guerra aveva lasciato in retaggio ai Congressi Matematici, ad un regime di piena indipendenza da ogni ragione politica, quale si conviene ad un Congresso scientifico veramente internazionale.

E l'aver superata quella crisi costituisce uno dei maggiori successi del Congresso di Bologna. Ciò hanno francamente riconosciuto uomini autorevoli delle opposte parti. Fra le tante attestazioni ricevute, pare opportuno riferire quella di uno dei più rappresentativi scienziati di parte tedesca, testimonio non indifferente dell'opera del Comitato di Bologna in tutte le fasi della laboriosa preparazione, che con leale franchezza, nell'atto stesso in cui annunciava che la sua veste ufficiale gli vietava di intervenire al Congresso, scriveva: « ....so wird Ihnen doch
» das Gefühl des Ruhmes bleiben, in der Gesundung der Verhältnissen den
» ersten und einer sehr grossen Schritt voran getan zu haben. Dank Ihrem
» entsagunsvollen Werk wird dann der nächste Kongress keinerlei Bedanken
» mehr begegnen. Sollte so auch der volle Erfolg Ihres Mühes erst in vier
» Jahren reifen, so bleibt Ihnen der Ruhm des tapferen Wegebereiters, der drei
» Jahre lang trotz aller Schwierigkeiten es verstanden hat, den einmal vorge-
» nommen Weg klug und energisch, tapfer und unbeugsam einzuhalten ».

E alla chiusura del Congresso, un congressista, esimio matematico e Rettore d'una importante Università tedesca, scriveva al Presidente: « ....dass es Ihrem
» taktvollen Verhalten gelungen ist, alle Politik völlig aus dem Spiel zu lassen
» und die Mathematiker alle Länder zu rein wissenshaftlichen Bestrebungen zu
» vereinigen, wird Ihnen von allen Seiten wärmsten Dank eintragen ».

## Organizzazione dei Lavori scientifici.

La Commissione Esecutiva stabilì che i lavori scientifici del Congresso si compissero per mezzo di *Conferenze* fatte in sedute plenarie da scienziati di riconosciuto valore, espressamente invitati dal Presidente del Comitato Ordinatore dietro indicazione della Commissione Esecutiva, sopra argomenti di interesse generale, e di Comunicazioni di Sezione cui fossero liberamente ammessi tutti i cultori di scienza matematica, senza distinzione di nazionalità e di scuola.

Per organizzare le Comunicazioni di Sezione, la Commissione Esecutiva nominò per ogni Sezione più *Introduttori*, che, giovandosi delle loro personali conoscenze e della autorità del loro nome nel campo scientifico da ognuno di essi particolarmente coltivato, potessero assicurare al Congresso l'intervento dei più illustri scienziati e dei maestri di maggior seguito.

Le *Comunicazioni* preannunziate furono in numero fuor del comune notevole (computando anche quelle giunte alla Segreteria dopo la pubblicazione del Diario, non meno di 419). La Segreteria del Congresso invitò tutti coloro che intendevano presentare Comunicazioni, a far conoscere, insieme col titolo, una chiara e breve esposizione dell'argomento; ed, in possesso degli argomenti di tutte le Comunicazioni presentate, procedette ad una ulteriore suddivisione delle Sezioni che in un primo tempo si erano stabilite, e distribuì le Comunicazioni in modo che in una stessa seduta di ogni Sezione si trattassero argomenti affini od aventi qualche connessione fra loro, e che non vi fosse grande disparità nel numero delle Comunicazione assegnate ad ogni singola seduta.

Risultarono così i seguenti aggruppamenti:

SEZIONE I. *Analisi* (quattro Sottosezioni): I-A. Teoria dei numeri. - Algebre, Matrici. - Gruppi discontinui. - Equazioni algebriche. - Funzioni algebriche. — I-B. Funzioni di variabili reali. - Teoria degli aggregati. Considerazioni topologiche. - Integrali generalizzati. - Sommazione di serie e di integrali. - Funzioni e successioni quasi periodiche. — I-C. Equazioni differenziali, alle differenze, integrali, integro-differenziali. - Calcolo delle variazioni. - Analisi funzionale. — I-D. Funzioni analitiche. - Sviluppi in serie. - Rappresentazione conforme. - Topologia.

SEZIONE II. *Geometria* (due Sottosezioni): II-A. Questioni topologiche in relazione con la geometria algebrica. - Gruppi di trasformazioni cremoniane, birazionali, di contatto.... - Ricerche generali su curve e superficie algebriche. - Ricerche speciali. — II-B. Topologia, in relazione alla geometria differenziale. - Geometria di Riemann e le sue estensioni. - Geometria proiettivo-differenziale. - Geometria della sfera e della retta. - Varia.

SEZIONE III. *Meccanica* (due Sottosezioni): III-A. Meccanica celeste. Astro-

nomia. - Meccanica dei sistemi. - Meccanica relativistica. - Elettrotecnica. — III-B. Idrodinamica. - Elasticità. - Equazioni della fisica matematica. - Varia.

SEZIONE IV. *Attuaria* (due Sottosezioni): IV-A. Calcolo delle Probabilità. - Statistica Matematica. - Teoria degli errori. - Medie ed interpolazioni. — IV-B. Economia matematica e Scienza attuariale.

SEZIONE V. *Ingegneria*: Idraulica. - Aerodinamica. - Costruzioni (Ponti). - Cartografia. - Applicazioni industriali.

SEZIONE VI. *Matematica elementare*: Logica matematica. - Questioni didattiche, Commissione internazionale per l'insegnamento matematico. - Pedagogia e metodologia matematica. - Varia.

SEZIONE VII. *Storia della Matematica. Filosofia*: Filosofia matematica. - Storia della matematica nell'antichità e nel Medio-Evo. - Storia della matematica nel Rinascimento e nell'epoca moderna. - Bibliografia matematica.

Nella Sezione II-A, presentò speciale interesse un gruppo di relazioni sui progressi delle varie teorie che costituiscono la Geometria Algebrica, promosse e coordinate dal prof. Severi.

Tali relazioni furono raccolte in una medesima seduta e figurano fra le Comunicazioni.

Gli argomenti delle Comunicazioni tempestivamente annunziate sono stati raccolti in un volume, distribuito ai Congressisti insieme col Diario delle sedute, prima dell'inizio del Congresso.

Le disposizioni per l'ordinamento e lo svolgimento dei lavori furono date con le circolari diramate nel novembre 1927 e nel gennaio 1928. Insieme riunite, esse costituiscono il seguente

## REGOLAMENTO DEL CONGRESSO.

Al Congresso Internazionale dei Matematici, che si terrà a Bologna dal 3 al 10 settembre 1928 sotto gli auspici della R. Università, sono invitati senza alcuna eccezione tutti i cultori delle scienze matematiche pure ed applicate.

CONGRESSISTI. - I Congressisti sono, o *membri effettivi*, od *associati*.

I membri effettivi pagano una quota d'iscrizione di Lire Italiane 50, hanno diritto di fare Comunicazioni o proposte nelle sedute del Congresso, di prendere parte alle discussioni ed alle votazioni, di partecipare a cerimonie, festeggiamenti, escursioni, visite; godranno dei diritti di ribasso sul prezzo dei viaggi sulle ferrovie e sulle linee di navigazione italiane, di riduzioni negli alberghi e nei ristoranti; su presentazione della tessera di congressista, sarà loro concesso gratuitamente il visto delle RR. Autorità Consolari sui passaporti, come pure il permesso di residenza. Essi avranno ingresso gratuito nei musei e nelle gallerie, e saranno loro dati gratuitamente i volumi degli Atti del Congresso.

Le persone appartenenti alla famiglia di un membro effettivo possono partecipare al Congresso in qualità di *membri associati,* versando una quota d'iscrizione di Lire Italiane 25. I membri associati non avranno gratuitamente i volumi del Congresso; essi non potranno partecipare alle votazioni nel Congresso, nè fare Comunicazioni o prendere parte alle discussioni; ma potranno assistere alle sedute, prender parte ai ricevimenti, alle escursioni, alle visite ecc., e godranno dei ribassi e di tutte le altre concessioni e facilitazioni date ai membri effettivi.

Sedute e lavori del Congresso. - La seduta solenne di apertura avrà luogo nell' Aula magna dell' antico Archiginnasio in Bologna, il giorno 3 settembre. La seduta di chiusura si farà in Firenze nel Salone dei Cinquecento a Palazzo Vecchio.

Nella seduta di chiusura, l' Assemblea generale dei membri effettivi designerà la sede del Congresso futuro.

Tutte le altre sedute e le adunanze si terranno nel palazzo dell' Università e negli istituti scientifici ad essa adiacenti.

Il Congresso si svolgerà con sedute plenarie ed adunanze di Sezione.

Nelle sedute plenarie, da autorevoli cultori dei vari rami di scienza si leggeranno conferenze di interesse generale; nelle adunanze di Sezione si leggeranno Comunicazioni su materie pertinenti al titolo della Sezione.

I lavori verranno distribuiti in 7 Sezioni, che saranno: 1) Aritmetica, Algebra, Analisi; 2) Geometria; 3) Meccanica, Astronomia, Geodesia, Geofisica, Fisica-matematica, Fisica teorica; 4) Statistica, Economia matematica, Calcolo delle probabilità, Scienza Attuariale; 5) Ingegneria e applicazioni industriali; 6) Matematiche elementari, Questioni didattiche, Logica matematica; 7) Filosofia, Storia della matematica.

Rimane inteso che, esigendolo il numero delle Comunicazioni, ogni Sezione potrà essere suddivisa in Sottosezioni.

Le Comunicazioni di Sezione dovranno essere preannunziate prima del 15 luglio (per mezzo di un apposito modulo fornito dalla Segreteria o dagli Introduttori alle Sezioni). Chi intende fare Comunicazioni di Sezione, dovrà perciò richiedere alla Segreteria del Congresso uno o più di tali moduli.

Prima dell' apertura del Congresso, a cura dell' ufficio di Segreteria, sarà pubblicato un fascicolo contenente il titolo e l' argomento di ogni Comunicazione, insieme con la designazione del giorno, dell' ora e della Sezione o Sottosezione in cui dovrà essere svolta.

È intenzione del Comitato Ordinatore di disporre tali Comunicazioni in modo che possano tutte effettivamente venire svolte, insieme con le discussioni scientifiche cui eventualmente possano dar luogo: di norma, la durata media di ogni Comunicazione sarà di circa un quarto d' ora, ma il Presidente della seduta di Sezione potrà regolarne l'andamento nel modo che stimerà più conveniente.

Nella prima seduta plenaria del Congresso si procederà alla costituzione del Seggio definitivo, il quale comprenderà: un Presidente effettivo; alcuni Vice-presidenti; un Segretario generale; alcuni Segretari aggiunti.

Le sedute plenarie successive saranno presiedute dal Presidente effettivo o da uno dei Vice-presidenti.

La prima adunanza di ciascuna Sezione sarà presieduta da uno degli Introduttori designato dal Comitato Ordinatore. In questa seduta si procederà alla suddivisione in Sottosezioni, e la Sezione nominerà uno o più Segretari che resteranno in carica per tutta la durata del Congresso.

Alla fine di ogni adunanza di Sezione o di Sottosezione i membri presenti eleggeranno il Presidente della seduta successiva.

PUBBLICAZIONE DEGLI ATTI DEL CONGRESSO. - Le Conferenze e le Comunicazioni lette al Congresso saranno raccolte nei volumi degli Atti.

Si pregano gli Autori di voler consegnare il testo delle loro letture ad uno degli Introduttori, od al Segretario generale del Congresso, non più tardi del 30 Novembre 1928.

Per gli scritti in lingue straniere (francese, inglese, spagnolo, tedesco), in latino classico ed in latino *sine flexione,* è richiesto l'uso della macchina da scrivere (eccettuate le formule). Se vi sono figure, i relativi clichés dovranno essere forniti dagli Autori.

## Sezioni ed Introduttori.

I. *Aritmetica, Algebra, Analisi*: M. CIPOLLA, R. Università di Palermo - G. FUBINI, R. Politecnico di Torino - G. SCORZA, R. Università di Napoli - L. TONELLI, R. Università di Bologna.

II. *Geometria*: L. BERZOLARI, R. Università di Pavia - E. BOMPIANI, R. Università di Roma - G. FUBINI, R. Politecnico di Torino - F. SEVERI, R. Università di Roma.

III. *Meccanica, Astronomia, Geodesia, Fisica-matematica, Fisica teorica*: G. ARMELLINI, R. Osservatorio Astronomico al Campidoglio, Roma - P. BURGATTI, R. Università di Bologna - E. FERMI, R. Università di Roma - T. LEVI-CIVITA, R. Università di Roma - C. SOMIGLIANA, R. Università di Torino.

IV. *Statistica, Economia matematica, Calcolo delle probabilità, Scienza attuariale*: L. AMOROSO, R. Università di Roma - P. CANTELLI, Istituto di Previdenza, Via Merulana 105, Roma - C. GINI, R. Università di Roma - G. TOJA, Facoltà di Scienze Economiche e Sociali, Via Lauro, Firenze.

V. *Ingegneria e Applicazioni industriali* (Ingegneria civile, meccanica, elettrotecnica, idraulica, Architettura navale, Telegrafia e telefonia con o senza fili, Arte militare, Aerodinamica, Cartografia): G. ALBENGA, R. Scuola Ingegneria

di Bologna - G. Di Pirro, Direttore Istituto Superiore Postale telegrafico-telefonico, Viale del Re 26, Roma - G. Giorgi, R. Università di Cagliari - F. Lori, R. Scuola Ingegneria, Padova - M. Panetti, R. Politecnico di Torino - C. Porro, Generale, Senatore del Regno, Rovello (Como) - U. Puppini, Direttore della R. Scuola di Ingegneria di Bologna - L. Silla, R. Scuola Ingegneria, Roma - G. Vacchelli, Generale, R. Istituto Geografico Militare di Firenze - G. C. Vallauri, R. Politecnico di Torino.

VI. *Matematiche elementari, Questioni didattiche, Logica matematica*: U. Amaldi, R. Scuola superiore d'Architettura di Roma - G. Peano, R. Università di Torino - A. Perna, Ispettorato centrale Ministero dell'Istruzione, Roma.

VII. *Filosofia, Storia della Matematica*: E. Bortolotti, R. Università di Bologna - F. Enriques, R. Università di Roma - R. Marcolongo, R. Università di Napoli - G. Vacca, R. Università di Roma.

## Agevolazioni, ricevimenti, festeggiamenti ai Congressisti.

Dopo che il Comitato Ordinatore ebbe predisposto un progetto di massima per le accoglienze ai Congressisti ed alle loro famiglie, ne fu affidata la esecuzione ad uno speciale comitato (Comitato Coordinatore) composto dei rappresentanti della R. Prefettura e del Podestà di Bologna, delle autorità locali che, pel loro ufficio sono in più diretto contatto coi forestieri, di cittadini autorevoli ed esperti e di una delegazione della Commissione Esecutiva. A presiedere tale comitato fu chiamato il prof. S. Pincherle, Presidente della Commissione Esecutiva.

Fu così possibile la perfetta ed ordinata esecuzione del programma prestabilito, nei punti essenziali seguenti:

Viaggi. — Ad ogni Congressista fu inviato un libretto con cinque scontrini di viaggio, che davano diritto, per cortese concessione di S. E. il Ministro delle Comunicazioni, alla riduzione del 50 % per altrettanti viaggi sulle ferrovie dello Stato, nel periodo dal 20 agosto al 30 settembre.

Le società di Navigazione Italiana per le linee del Mediterraneo, hanno concesso il ribasso del 30 %.

Arrivo alla Stazione - Passaporti - Alloggi - Varia. — Alla stazione di Bologna, nel periodo del Congresso, funzionava un *Ufficio di Informazioni*, ove i Congressisti, appena smontati dal treno, trovavano accoglienza da rappresentanti della Commissione degli alloggi, che si incaricavano della assegnazione e distribuzione delle camere, a norma di tabelle prefissate ed inderogabili, che in tempo utile erano state comunicate ai Congressisti con apposita circolare, e fornivano ai Congressisti tutte le indicazioni utili al loro soggiorno in Bologna ed alla partecipazione ai lavori del Congresso.

Nei locali del Congresso funzionavano, ad esclusiva disposizione dei Congressisti:

un Ufficio postale-telegrafico-telefonico;

una sezione di Ufficio Bancario, per qualsiasi operazione di Banca (cambio-moneta, lettere di credito, assegni, vaglia, chèques, depositi di valori...);

una sezione della R. Questura, per il visto sui passaporti e per i permessi di soggiorno.

Ai Congressisti fu concesso, per tutta la durata del Congresso, *libera circolazione sui tram della Città di Bologna, ed ingresso gratuito ai Musei ed alle Pinacoteche di Bologna e di Firenze.*

RICEVIMENTI UFFICIALI - FESTEGGIAMENTI - ESCURSIONI - VISITE. — Ad istanza del Comitato Ordinatore del Congresso, il Governo Nazionale, il Municipio di Bologna, le città di Firenze, Ravenna, Ferrara, l'Unione Matematica Italiana, hanno dato ricevimenti solenni ai Congressisti; lo stesso Comitato offrì un pranzo di 1100 coperti nei locali del Littoriale, e l'audizione di un concerto orchestrale di musica italiana, diretto dal M.° Guarnieri, nel massimo teatro della città.

I Congressisti furono condotti a visitare le città di *Firenze, Ravenna, Ferrara,* e guidati alla visita dell'impianto idro-elettrico del *Ponale* sul Lago di Ledro.

PUBBLICAZIONI OFFERTE IN DONO.

Ad ogni Congressista veniva offerto:

una *Piantina dei quartieri della città adiacenti agli Istituti Universitari*;

una *Guida illustrata di Bologna,* offerta dalla Commissione per il movimento dei Forestieri in Bologna;

un *Album di 34 artistiche fotografie* di monumenti e vedute di Bologna, offerto dal Municipio;

un *volume degli Argomenti delle comunicazioni* presentate alle Sezioni del Congresso col *Diario delle Sedute* nelle Sezioni del Congresso, pubblicati a cura della Segreteria del Congresso;

la Memoria di LUIGI BIANCHI: *Congruenze di sfere di Ribaucour e superficie di Peterson:* ultimo lavoro di quel grande geometra, che Egli aveva scritto appositamente per questo Congresso, e che è stato offerto in omaggio ai Congressisti, dai figli di Lui e dalla Casa Editrice Nicola Zanichelli;

il fascicolo in corso ($4^0$ del Tomo $V^0$, Serie IV) degli *Annali di Matematica pura ed applicata,* offerto ai Congressisti dalla Casa Editrice Nicola Zanichelli;

il *Cenno storico su la Scuola Matematica di Bologna,* (edizioni italiana e francese) composto dal prof. ETTORE BORTOLOTTI: dono del Comitato ai Congressisti;

la *Prefazione ai Libri inediti dell'Algebra di Rafael Bombelli,* pubblicati dall'Istituto Nazionale per la Storia delle Scienze Fisiche e Matematiche.

Furono inoltre distribuiti ad altrettanti congressisti 100 esemplari della edizione fuori Commercio, numerata a mano dall' 1 al 100, della artistica Monografia: *Industrie artistiche e Botteghe artigiane Bolognesi,* edita a cura del Consiglio Provinciale dell' Economia di Bologna, in splendida veste tipografica.

## Contribuzioni.

Per provvedere alle spese occorrenti alla organizzazione ed allo svolgimento del Congresso, la Commissione Esecutiva si rivolse, con domanda di sussidio, al Governo Nazionale, al Comune ed alla provincia di Bologna, alle istituzioni culturali Italiane, ed a tutti gli Enti pubblici e privati che si poteva presumere avessero interesse od attinenza allo sviluppo della Scienza.

Segue l' elenco completo dei contributi finanziari per tal modo ottenuti, fra i quali va ricordato in modo specialissimo quello del Governo Nazionale, non solo per il valore intrinseco ingentissimo, ma perchè fu il primo inizio, la base su cui la Commissione potè fondare ragionevoli speranze di avere i mezzi necessari a far fronte ai gravissimi impegni che essa si era assunto e stava per assumere.

Gli aiuti di ordine morale che le Autorità politiche ed Amministrative hanno, con liberale larghezza, conceduto alla Commissione Esecutiva per la preparazione e lo svolgimento del Congresso, non furono meno preziosi delle contribuzioni finanziarie.

Ed anzitutto va ricordata, con vivo senso di gratitudine, la *Maestà del Re d'Italia,* che volle concedere al Congresso il suo Alto Patronato e la presenza di un Principe della sua Casa alla seduta inaugurale.

Con specialissima menzione poi *S. E. il Capo del Governo,* che, fin dal primo momento riconobbe l' importanza, non solo scientifica, del Congresso di Bologna, che si degnò di accettarne la Presidenza d' Onore e che, con l' autorità ed il prestigio del Suo nome, dischiuse alla presidenza del Comitato le porte dei ministeri e delle pubbliche e private amministrazioni, delle istituzioni colturali, tecniche, industriali.

Fra le Autorità locali, è da ricordare in primo luogo S. E. il *Prefetto di Bologna,* gr. uff. GIUSEPPE GUADAGNINI, che con cordiale spontaneità, mise a disposizione del Comitato l' autorità dell' ufficio, la personale esperienza, la vasta cultura ed il suo gran cuore di cittadino bolognese, geloso custode delle tradizioni della sua città natale, antica madre degli studi.

La Commissione Esecutiva sapeva di poter contare sul suo appoggio nelle più difficili circostanze.

Nè meno prezioso fu l' appoggio concesso al Congresso dal *Podestà di Bolo-*

*gna,* on. LEANDRO ARPINATI, sempre pronto ad intervenire, con fattiva energia, a vantaggio del Comitato.

Di vero sollievo alle cure della Commissione degli alloggi e delle accoglienze ai Congressisti stranieri, fu l'opera prestata, con assidua premura ed instancabile benevolenza, dal *Questore di Bologna,* comm. ALCIDE LUCIANI; dal capo compartimento delle ferrovie, comm. CARLO MONTUSCHI, e dai *Delegati Podestarili,* fra i quali piace ricordare, con speciale senso di gratitudine, il conte comm. ing. GIUSEPPE MANZONI ANSIDEI.

Infine ricorderemo le splendide, cordiali accoglienze offerte ai Congressisti dalle città di *Firenze, Ferrara, Rovereto,* e dal *Consorzio Rovereto-Riva,* e quelle generose, indimenticabili, del comune di *Ravenna*; la cordiale ospitalità offerta dal *Circolo di Cultura* e dalla *Casa del Fascio,* e le facilitazioni offerte dalla *Agenzia Comunale del Tramvai.*

Troppo lungo sarebbe il nominare tutte le istituzioni e tutte le persone cui la Commissione Esecutiva del Congresso deve particolari ringraziamenti, perchè in mille modi contribuirono a rendere gradito ai Congressisti il soggiorno in Bologna, ed a promuovere il conseguimento di uno degli scopi principali dei Congressi Internazionali, quello cioè di stringere legami di amicizia fra uomini di lontani paesi, congiunti da un unico ideale di scienza. Ma non si può trascurare la eletta schiera di giovani, che con puro disinteresse, animati da vero amore per la scienza e da sentimento di dovere, sacrificarono le vacanze estive al duro, paziente, indefesso lavoro di segreteria.. Nè dimenticheremo la costante assistenza della Casa Editrice NICOLA ZANICHELLI, che si addossò tutto il lavoro inerente alla stampa, alla pubblicazione ed alla distribuzione delle circolari, dei fogli di avviso del volume degli argomenti e del Diario delle Comunicazioni, insomma di tutti gli stampati occorrenti alla preparazione ed allo svolgimento del Congresso.

Ci piace infine di segnalare le generose spontanee contribuzioni di alcuni privati industriali: la ditta CALZONI ed il comm. TITO FRANCIA-COMI di Bologna, ed il comm. OTTORINO POMINI di Castellanza; quest'ultimo in modo speciale non solo per la cospicua offerta, ma per le tante benemerenze acquistate verso la matematica italiana.

## ELENCO DELLE CONTRIBUZIONI

| | | |
|---|---|---|
| 1. Assicurazioni Generali Venezia, Direzione di Trieste . . . | L. | 3000 — |
| 2. Assicurazione Vita Milano . . . . . . . . . . . . . . . | » | 500 — |
| 3. Associazione Elettrotecnica Italiana (Sez. di Bologna) . . . | » | 3000 — |
| 4. Associazione Elettrotecnica Italiana (Sez. di Torino) . . . . | » | 1000 — |
| 5. Banca Popolare di Credito in Bologna . . . . . . . . . | » | 1000 — |
| 6. Calzoni Alessandro (Ditta) . . . . . . . . . . . . . . | » | 500 — |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 7. | Cassa Nazionale Assicurazioni Sociali | L. | 5000 — |
| 8. | Cassa di Risparmio in Bologna | » | 15000 — |
| 9. | Comune di Bologna | » | 50000 — |
| 10. | Confederazione Nazionale Fascista Agricoltori | » | 5000 — |
| 11. | Confederazione Generale Fascista dell' Industria | » | 5000 — |
| 12. | Consiglio Provinciale dell' Economia | » | 10000 — |
| 13. | Credito Romagnolo | » | 500 — |
| 14. | Fondiaria Vita Firenze | » | 500 — |
| 15. | Francia-Comi Comm. Dr. Tito | » | 1000 — |
| 16. | Governo Nazionale e Ministero Istruzioni | » | 200000 — |
| 17. | Istituto Nazionale di Assicurazioni | » | 5000 — |
| 18. | Ministero Economia Nazionale | » | 5000 — |
| 19. | Monte de' Paschi di Siena | » | 500 — |
| 20. | Monte di Pietà, Bologna | » | 1000 — |
| 21. | Pomini Comm. Ing. Ottorino | » | 10000 — |
| 22. | Provincia di Bologna | » | 25000 — |
| 23. | Riunione Adriatica di Sicurtà, Trieste | » | 2000 — |
| 24. | Scuola d' Ingegneria di Bologna | » | 5000 — |
| 25. | Società Cattolica Assicurazione, Verona | » | 200 — |
| 26. | Unione Industriale Fascista della Provincia di Bologna | » | 2000 — |
| 27. | Unione Matematica Italiana | » | 5000 — |
| 28. | Unione Nazionale Fascista Industrie Elettriche | » | 33000 — |
| 29. | Unione Società Riassicuratrici | » | 1000 — |
| 30. | Università di Bologna | » | 50000 — |
| 31. | Università di Studi Economici e Commerciali di Trieste | » | 500 — |

Per il ricupero, la custodia e l' amministrazione di questi fondi, come pure per l' amministrazione delle quote versate dai Congressisti, la Commissione Esecutiva si è appoggiata alle Casse Universitarie, e si è valsa dell' opera graziosamente prestata dal Direttore di Segreteria dell' Università di Bologna, comm. G. BORSARI, e dei funzionari addetti all' Economato Universitario.

# AUTORITÀ - COMITATI - UFFIZI

# CONGRESSISTI

## COMITATO D'ONORE

*Presidente:* S. E. Cav. Benito Mussolini, Capo del Governo.
S. E. T. Tittoni, Presidente del Senato.
S. E. A. Casertano, Presidente della Camera dei Deputati.

S. E. L. Federzoni, Ministro delle Colonie - S. E. A. Rocco, Ministro della Giustizia e degli Affari di Culto - S. E. G. Volpi, Conte di Misurata, Ministro delle Finanze - S. E. G. Giuriati, Ministro dei Lavori Pubblici - S. E. P. Fedele, Ministro della Pubblica Istruzione - S. E. G. Belluzzo, Ministro dell'Economia Nazionale - S. E. C. Ciano, Ministro delle Comunicazioni - S. E. F. Giunta, Sottosegretario di Stato alla Presidenza del Consiglio dei Ministri - S. E. D. Grandi, Sottosegretario di Stato per gli Affari Esteri - S. E. M. Bianchi, Sottosegretario di Stato per l'Interno - S. E. U. Cavallero, Sottosegretario di Stato per la Guerra - S. E. G. Sirianni, Sottosegretario di Stato per la Marina - S. E. I. Balbo, Sottosegretario di Stato per l'Areonautica - S. E. G. Bottai, Sottosegretario di Stato per le Corporazioni.

S. E. A. Turati, Segretario del Partito Nazionale Fascista.
S. E. P. Badoglio, Maresciallo d'Italia, Capo di Stato Maggiore Generale.

S. Eminenza G. B. Nasalli Rocca, Conte di Cornegliano, Cardinale Arcivescovo di Bologna - S. E. F. Grazioli, Generale Comandante d'Armata - S. E. A. Tallarigo, Comandante del Corpo d'Armata di Bologna - S. E. G. Guadagnini, Prefetto della Provincia di Bologna - S. E. P. Alberici, Primo Presidente della Corte d'Appello di Bologna - on. G. Albini, Senatore del Regno, Rettore della R. Università di Bologna - on. A. Dallolio, Senatore del Regno.

On. A. Garbasso, Senatore del Regno, Podestà di Firenze - on. G. Gentile, Senatore del Regno, Presidente del Consiglio Superiore della Pubblica Istruzione - on. Marchese N. Malvezzi De Medici, Senatore del Regno - on. G. Marconi, Senatore del Regno, Presidente del Consiglio Nazionale delle Ricerche - on. E. Pini, Senatore del Regno - on. L. Rava, Senatore del Regno, Presidente della Regia Accademia delle Scienze di Bologna - on. V. Scialoja, Senatore del Regno, Presidente della R. Accademia dei Lincei - on. P. Sitta, Senatore del Regno, Rettore della R. Università di Ferrara - on. Marchese G. Tanari, Senatore del Regno - on. Marchese L. Zappi, Senatore del Regno.

Deputati al Parlamento: on. L. Arpinati, Podestà di Bologna - on. B. Biagi - on. C. Buttafuochi - on. A. Chiarini - on. B. Giuliano - on. P. S. Leicht on. A. Manaresi - on. V. Peglion.

Comm. U. Turchi, Presidente della Deputazione Provinciale di Bologna.
S. E. A. Giannini, Vicepresidente del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

## COMITATO ORDINATORE

Prof. G. Albini, Senatore del Regno. Rettore della R. Università, *Presidente.*
S. E. il Gr. Uff. G. Guadagnini, Prefetto della Provincia di Bologna.
On. L. Arpinati, Podestà di Bologna.
Comm. U. Turchi, Presidente della Deputazione Provinciale.
S. E. Mons. Ettore Lodi, Vescovo ausiliario.

Prof. G. Albenga - prof. I. Amaldi - prof. A. Arcangeli - prof. M. Betti - prof. E. Bompiani - comm. G. Borsari - prof. E. Bortolotti - prof. G. Brini - prof. P. Burgatti - comm. A. Calzoni - prof. conte W. Cesarini Sforza - comm. G. Crocioni - sen. A. Dallolio - comm. F. De Morsier - prof. L. Donati - prof. P. Ducati - prof. F. Flora - comm. T. Francia - prof. A. Ghigi - on. prof. Balbino Giuliano - prof. F. Guarducci - prof. G. Horn d'Arturo - on. prof. P. S. Leicht - prof. D. Majocchi - prof. Q. Majorana - rag. R. Manzini - comm. C. Montuschi - prof. A. Muggia - prof. S. Pincherle - avv. G. Pini - prof. G. Plancher - prof. U. Puppini - comm. M. Rampini - prof. G. Sartori - prof. F. Sfameni - avv. C. Silvani - sen. P. Sitta - prof. I. B. Supino - sen. G. Tanari - prof. L. Tonelli prof. G. Viola - prof. R. Viti - comm. D. Zucchini.

## COMMISSIONE ESECUTIVA

Prof. Salvatore Pincherle, *Presidente.*

Prof. Enrico Bompiani - prof. Pietro Burgatti - prof. Federico Guarducci - prof. Guido Horn d'Arturo - prof. Quirino Majorana - prof. Umberto Puppini - prof. Leonida Tonelli - prof. Dino Zucchini - comm. Gildo Borsari, *Tesoriere economo* - prof. Ettore Bortolotti, *Segretario generale.*

## COMITATO COORDINATORE

Prof. Salvatore Pincherle, *Presidente.*
Fantini Dott. Alberto, *Vicepresidente.*
Manzoni-Ansidei conte comm. Ing. Giuseppe, *Segretario.*

Bonaveri geom. Giovanni - Borghi console cav. uff. Mario - Borsari comm. Gildo - Bortolotti prof. Ettore - Cavazza conte dott. Francesco - Centofanti colonn. cav. uff. Ettore - De-Morsier comm. avv. Frank - Luciani comm. Alcide - Manzini rag. Raimondo - Mezzetti cav. dott. Nazzareno - Montuschi comm. ing. Carlo - Pini avv. Giorgio - Regazzoni cav. Carlo - Stabilini ing. Luigi - Zeni ing. dott. Edgardo - Zucchini ing. comm. Dino - Zucchini-Solimei conte comm. Carlo.

## UFFICIO DI SEGRETERIA DEL CONGRESSO

*Presidente:* S. Pincherle.
*Segretario generale:* Ettore Bortolotti.
*Segretari:*

L. Tonelli, per l'organizzazione scientifica.
A. Mambriani, per la corrispondenza.
L. Onofri, per gli alloggi e la disposizione dei locali del Congresso
Editta Pini, per gli alloggi e l'organizzazione dell'ufficio di informazioni alla stazione.
G. Supino, per i viaggi.

## PRESIDENTI DI SEZIONE

| Sezioni | 4 settembre | 5 settembre | 6 settembre | 8 settembre |
|---|---|---|---|---|
| I-A | E. Landau | J. C. Fields | R. Fueter | O. A. Smith<br>D. Mirimanoff |
| I-B | H. Bohr | F. Riesz | N. Lusin<br>S. Banach | H. Hahn<br>O. Onicescu |
| I-C | G. Fubini<br>G. Vitali | G. M. Julia | R. Courant | A. Haar |
| I-D | G. Pólya | G. Valiron | P. Koebe | M. Plancherel |
| II-A | V. Snyder | L. A. Godeaux | G. Castelnuovo | G. Fano |
| II-B | E. Cartan | W. Blaschke | J. A. Schouten<br>E. Bompiani | B. Bydžovský |
| III-A | L. Lichtenstein | J. Chazy<br>G. D. Birkhoff | J. Le Roux<br>E. T. Whittaker | G. Gianfranceschi |
| III-B | A. Rosenblatt<br>B. Hostinský | E. Meissner<br>G. Kolossoff | N. Kryloff | A. Rosenblatt |
| IV-A | F. Cantelli | L. G. Du Pasquier | A. Guldberg | M. Fréchet<br>G. Darmois |
| IV-B | G. Toja | R. Risser | E. J. Gumbel | E. J. Gumbel |
| V | T. Kármán | U. Cisotti | C. B. Biezeno | V. Castellani |
| VI | H. Fehr | G. Castelnuovo<br>D. Sintsof | S. Dickstein | U. Amaldi |
| VII | R. C. Archibald | G. Loria | G. Loria | N. Parfentieff |

## ENTI RAPPRESENTATI AL CONGRESSO - DELEGATI

### ARGENTINA

Governo Argentino: proff. R. BIANCHEDI, U. BROGGI.
Facultad de Ciencias Fisico-Matematicas, La Plata: prof. U. BROGGI.
Facultad de Ciencias Matematicas, Fisico, Quimicas y Naturales-Rosario. N. N.
Sociedad Cientifica Argentina: ing. L. LUIGGI.
Universidad de Buenos Aires: proff. R. BIANCHEDI, U. BROGGI.

### AUSTRIA

Akademie der Wissenschaften in Wien: prof. dr. Hofrat W. WIRTINGER.

### BELGIO

Governo del Belgio: proff. T. DE DONDER, C. DE LA VALLÉE POUSSIN, A. DEMOULIN, L. GODEAUX, A. MINEUR.
Académie Royale de Belgique: proff. T. DE DONDER, C. DE LA VALLÉE POUSSIN, A. DEMOULIN.
Societé Scientifique de Bruxelles: prof. C. DE LA VALLÉE POUSSIN.
Université de Liège: prof. L. GODEAUX.
Université Catholique de Louvain: prof. C. DE LA VALLÉE POUSSIN.

### BRASILE

Scuola politecnica Bahia: prof. L. AFRANIO DO AMARAL.

### BULGARIA

Università di Sofia: proff. N. OBRECHKOV, K. POPOV, D. TABAKOV, L. TCHAKALOV.

### CANADÀ

Royal Canadian Institute: proff. J. C. MC LENNAN, J. C. FIELDS.
Dalhousie University Halifax: proff. J. G. ADSHEAD, G. H. HENDERSON.
University of British-Columbia: dr. D. BUCHANAN.
University of Toronto: proff. A. T. DE LURY, G. C. FIELDS, J. C. MC LENNAN.

### CECOSLOVACCHIA

Governo Cecoslovacco: proff. K. PETR, L. BERWALD, B. HOSTINSKY, K. RYCHLIK.
Česká Akademie věd a Uměni: prof. B. BYDŽOVSKÝ.
Českého vysokého Učeni Technického v Praze: dr. prof. K. RYCHLIK.

Deutsche Universität in Prag: prof. dr. L. BERWALD.
Jednota Československych Matematiku a Fysicu v Praze: prof. B. BYDŽOVSKÝ.
Karlovy University v Praze: prof. dr. C. PETR.
Masarykova Universita v Brno: prof. dr. B. HOSTINSKY, E. ČECH.

COSTA RICA

Governo di Costa Rica: sig. Console I. RIGHI.

DANIMARCA

Det Kongelige Danske Videnskabernes Selskab: prof. N. E. NORLUND.
Die Konigliche Technische Hochschule: prof. dr. J. MOLLERUP.
Institut de Géodésie à Copenhague: prof. N. E. NORLUND.

EGITTO

Institut d'Egypte: ing. FARID BOULAD BEY, ing. D. LIMONGELLI.

FINLANDIA

Governo Finlandese: prof. R. NEVANLINNA.
Tekniska Hogskolan i Finland: Prof. P. J. MYRBERG.
Université Helsinki: prof. R. NEVANLINNA.

FRANCIA

Governo Francese: prof. M. FRÉCHET.
Académie de Montpellier: prof. P. HUMBERT.
Académie de Rennes: prof. J. LE ROUX.
Association française pour l'avancement des Sciences: prof. L. DU PASQUIER.
Conservatoire national des arts et métiers: proff. G. KOENIGS, A. MESNAGER, R. RISSER.
École Centrale des Arts et Manufactures: prof. J. HADAMARD.
École Normale Supérieure: proff. E. VESSIOT, G. JULIA.
Institut de France (Académie des Sciences): prof. J. HADAMARD.
Institut des Actuaires français: Mrs A. QUIQUET, R. RISSER.
Institut international de coopération intellectuelle: M. DE VOS VAN STEENWIJK.
Société française de Physique: prof. E. BOREL, dr. D. RIABOUCHINSKY.
Société Mathématique de France: proff. E. BOREL, J. HADAMARD, P. LÉVY, J. CHAZY, J. LE ROUX.
Sorbonne (v. Université de Paris).
Université de Clermont-Ferrand: prof. P. FLAMANT.
Université de Lille: proff. B. GAMBIER, J. KAMPÉ DE FÉRIET.

Université de Nancy: proff. Ed. Husson, G. Darmois.
Université de Paris: proff. E. Borel, E. Cartan.
Université de Strasbourg: proff. M. Fréchet, G. Valiron, H. Milloux.
Université de Toulouse: prof. A. Buhl.

GERMANIA

Governo Germanico: dr. A. Frendenberg, segretario d'Ambasciata.
Academie der Wissenschaften, Heidelberg: dr. H. Liebmann
Academie der Wissenschaften (Sächsische): prof. P. Koebe.
Gesellschaft der Wissenschaften, Göttingen: proff. D. Hilbert, Ed. Landau, R. Courant.
Technische Hochschule, Karlsruhe: dr. Th. Pöschl.
Technische Hochschule, Stuttgart: prof. G. Doetsch.
Universität (Hessischen Landes), Giessen: dr. Harald Geppert.
Universität (Georg August), Göttingen: proff. D. Hilbert, E. Landau, R. Courant.
Universität Hamburg: prof. W. Blaschke.
Universität Heidelberg: prof. A. Rosenthal.
Universität (Christian Albrechts), Kiel: dr. A. Fraenkel.
Universität (Albertus), Kœnigsberg: prof. dr. K. Reidemeister.
Universität Leipzig: prof. P. Koebe.
Universität (Westf. Wilhelms), Münster: dr. H. Behnke.
Universität Rostock: prof. R. Furch.

GIAPPONE

National Research Council, Tokyo: dr. S. Kakeya.
Tohoku imperial University, Sendai: dr. Yoshitomo Okada.
University (imperial) Tokyo: M. I. Suetsuna.

GRAN BRETTAGNA (e Nord Irlanda)

Mathematical Society, Edinburgh: proff. B. B. Baker, M. E. T. Copson, W. Saddler.
Philosophical Society, Cambridge: M. R. H. Fowler, M. F. P. White.
Physical Society, London: prof. C. G. Darwin.
Royal Society, Edinburgh: proff. E. T. Whittaker, J. E. A. Steggall, H. W. Turnbull.
Royal Society, London: proff. H. F. Baker, G. H. Hardy.
University of Aberdeen: proff. H. M. Macdonald, G. Paget Thomson.
University of Birmingham: prof. G. H. Hardy.
University (the Queen's) of Belfast: prof. A. C. Dixon.
University of Cambridge: proff. H. F. Baker, R. H. Fowler, F. P. White.

University of Edinburgh: proff. E. T. WHITTAKER, C. G. DARWIN.
University of Glasgow: prof. J. G. GRAY.
University of Leeds: M. A. E. INGHAM.
University of London: prof. B. B. BAKER.
University (the Victoria) of Manchester: proff. E. A. MILNE, L. J. MORDELL.
University of Oxford: proff. G. H. HARDY, DOROTHY MAUD, WRINCH NICHOLSON.
University of S.t Andrews: proff. I. E. A. STEGGALL, H. W. TURNBULL.
University of Wales, Cardiff: M. TH. LEWIS.

GRECIA

Governo Ellenico: prof. P. ZERVOS.
Universitá di Atene: proff. N. SAKELLARION, N. HATZIDAKIS, P. ZERVOS.

GUATEMALA

Governo del Guatemala: Console generale V. DURÁN.

IRLANDA

Trinity College, Dublin: prof. A. J. MC CONNELL.

ITALIA

R. Accademia Nazionale dei Lincei: proff. E. D'OVIDIO, E. BERTINI, S. PINCHERLE.
Accademia Pontificia delle Scienze Nuovi Lincei: prof. G. GIORGI.
R. Accademia delle Scienze di Modena: proff. ETTORE BORTOLOTTI, RICCARDO MALAGOLI.
R. Accademia Peloritana dei Pericolanti, Messina: proff. G. B. RIZZO, V. MARTINETTI, U. CRUDELI.
R. Accademia Navale, Livorno: prof. G. LAZZERI.
Assicurazioni Generali, Trieste: dr. P. SMOLENSKY.
Associazione Elettrotecnica Italiana, Milano: prof. G. SARTORI.
Associazione Elettrotecnica Italiana, Sezione di Bologna: prof. G. SARTORI, ingegneri A. RIGHI, C. RIMINI.
Cassa di Risparmio di Bologna: Conte G. ISOLANI LUPARI, ing. E. MASETTI, dr. F. DE BOSDARI.
Circolo Matematico di Catania: proff. G. SCORZA, M. CIPOLLA.
Circolo Matematico di Palermo: proff. M. DE FRANCHIS, G. FUBINI, T. LEVI-CIVITA, F. SEVERI.
Confederazione Generale Fascista dell'Industria, Roma: cav. C. REGAZZONI.
Consiglio Provinciale dell'Economia, Bologna: comm. F. DE MORSIER, conte G. ISOLANI LUPARI, cav. C. REGAZZONI, cav. A. PINI.

R. Deputazione di Storia Patria, Bologna: sen. L. RAVA, proff. I. B. SUPINO, ETTORE BORTOLOTTI, cav. C. FRATI.

Direzione Generale Ferrovie dello Stato, Roma: ingegneri C. MONTUSCHI, V. CASTELLANI, D. SPANI.

Direzione Generale Poste e Telegrafi, Roma: prof. G. DI PIRRO.

Fondiaria Vita, Firenze: dr. R. OTTAVIANI.

Giornale di Matematiche, Napoli: prof. R. MARCOLONGO.

Istituto Centrale di Statistica, Roma: prof. C. GINI.

Istituto Geografico Militare, Firenze: prof. A. LOPERFIDO.

Istituto Marchigiano di Scienze, Lettere ed Arti, Ancona: prof. L. DONATI.

Istituto Nazionale delle Assicurazioni, Roma: prof. L. AMOROSO.

Istituto Sup. di Scienze Economiche e Commerciali, Bari: prof. C. BONFERRONI.

Istituto Superiore di Scienze Economiche e Commerciali, Torino: prof. F. INSOLERA.

Istituto Sup. di Scienze Economiche e Commerc., Venezia: prof. C. A. DELL'AGNOLA.

Ministero Aeronautica: prof. E. RAIMONDI.

Ministero delle Comunicazioni: ing.ri C. MONTUSCHI, V. CASTELLANI, F. SPANI.

Ministero Economia Nazionale: prof. S. MINETOLA.

Ministero Finanze: prof. M. BACHI.

Ministero Guerra: T. colonn. F. AMOROSO.

Ministero Istruzione: prof. A. PERNA.

Ministero Lavori Pubblici: ing. M. GIANDOTTI.

Ministero Marina: colonn. G. RABBENO.

R. Osservatorio Astronomico del Campidoglio, Roma: prof. G. ARMELLINI.

Riunione Adriatica di Sicurtà, Trieste: dr. L. SPITZER, L. RIEDEL.

R. Scuola di Ingegneria, Bologna: proff. U. PUPPINI, G. SARTORI.

R. Scuola di Ingegneria Navale, Genova: proff. N. RONCO, G. LORIA, ED. CASATI.

R. Scuola di Ingegneria, Milano: prof. U. CISOTTI.

R. Scuola di Ingegneria, Padova: proff. C. PARVOPASSU, F. LORI, A. CAPETTI.

R. Scuola di Ingegneria, Palermo: prof. M. GRECO.

R. Scuola di Ingegneria, Torino: prof. G. FUBINI.

R. Scuola Superiore di Architettura, Roma: prof. U. AMALDI.

Sindacato Nazionale Fascista Ingegneri, Roma: prof. U. PUPPINI.

Società Astronomica Italiana, Roma: prof. G. ARMELLINI.

Società Cattolica di Assicurazione, Verona: ing. P. CEVESE.

Società Idroelettrica Piemonte, Torino: ing. S. TREVES.

Società Italiana di Fisica, Bologna: proff. V. VOLTERRA, T. LEVI-CIVITA, P. BURGATTI.

Società Italiana per il Progresso delle Scienze, Roma: professori L. SILLA, F. ENRIQUES, L. AMOROSO.

Società Italiana delle Scienze, detta dei XL, Roma: proff. S. PINCHERLE, G. CASTELNUOVO.

Società Reale di Napoli: proff. G. TORELLI, R. MARCOLONGO, G. SCORZA.
Telefoni Italia Media Orientale: ing. G. MARCHESI.
Unione Industriale Fascista, Provincia di Bologna: cav. C. REGAZZONI.
Unione Nazionale Fascista Industrie Elettriche: ing. E. CESARI.
R. Università, Cagliari: prof. G. GIORGI.
Università, Ferrara: professori RITA BRUNETTI, G. PIETRA, A. TONOLO, MARGHERITA BELOCH-PIAZZOLA.
R. Università, Genova: proff. C. SEVERINI, G. LORIA.
R. Università, Padova: proff. E. LAURA, A. COMESSATTI, G. VITALI.
R. Università, Pavia: prof. L. BERZOLARI.
R. Università, Roma: prof. E. BOMPIANI.
R. Università di Studi Economici e Commerciali, Trieste: prof. F. SIBIRANI.

## JUGOSLAVIA

Governo S. H. S.: dr. I. PLEML.
Académie Royale Serbe: proff. M. PETROVITCH, A. BILIMOVITCH.
Université de Belgrade: proff. M. PETROVITCH, A. BILIMOVITCH.
Universita di Zagabria: prof. V. VARICÁK.

## LETTONIA

Governo della Lettonia: prof. E. LEJNIEK.
Université de Lettonie, Riga: prof. E. LEJNIEK.

## NORVEGIA

Governo Norvegese: proff. A. GULDBERG, V. BRUN.
Norge Akademiske Kollegium: prof. A. GULDBERG, dr. P. HEEGAARD.
Norske Videnskaps-Akademi, Oslo: prof. A. GULDBERG, dr. P. HEEGAARD.
Norges Tekniske Hoiskole, Trondlyèm: proff. V. BRUN, R. TAMBS LYKE.

## OLANDA

Governo dei Paesi Bassi: prof. J. A. SCHOUTEN.
Technische Hoogeschool, Delft: ing. C. B. BIEZENO, professori H. BREMEKAMP, J. A. SCHOUTEN, dr. I. M. BURGERS.
Universität Leiden: prof. W. VAN DER WOUDE, dr. J. TROSTE.

## PALESTINA

Asssociation of Engineers & Architects in Palestina: dr. M. REINER.
University of Jerusalem: dr. B. AMIRA.

## PERÙ

Governo del Perù: dr. don P. E. PAULET.

## POLONIA

Governo Polacco: proff. W. SIERPINSKI, L. CHWISTEK, S. HACZMARZ, I. SPLAWA-NEYMAN. - Presidente d'onore della delegazione: S. E. C. BARTEL.
Académie Polonaise des Sciences et Lettres: proff. W. SIERPINSKI, S. BANACH.
École Polytechnique de Lwow: prof. V. STOZEK.
Société Polonaise de Mathématique: prof. W. SIERPINSKI.
Société des Sciences et des Lettres de Lwow: prof. A. LOMNICKI.
Universíté de Lwow: prof. E. ZYLINSKI.
Universíté de Varsovie: prof. S. MAZURKIEWICZ.

## ROMANIA

Academia Românâ - Bucarest: prof. G. TZITZÉICA.

## RUSSIA

Académie des Sciences de l'U. R. S. S.: proff. S. BERNSTEIN, N. KRYLOFF.
Groupe Académique Russe, Paris: dr. B. DEMTSCHENKO
Université de Kasan: prof. N. PARFENTIEFF.

## SPAGNA

Ministerio de Instrucción Pública: prof. D. E. TERRADAS.
R. Academia de Ciencias y Artes, Barcelona: prof. D. A. TORROYA.
R. Academia de Ciencias exactas, Fisicas y Naturales, Madrid: proff. I. PLANS, I. C. ALVAREZ UDE, E. TERRADAS.
Confederación Sindical Hidrográfica, Zaragoza: proff. M. L. PARDO, F. C. FERNANDEZ DE VILLEGAS.
Escuela Central de Ingenieros Industriales, Madrid: prof. C. M. ARACIL.
Escuela de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos, Madrid: prof. P. M. GONZÁLES QUIJANO.
Universidad de Barcelona: proff. A. TORROJA, E. TERRADAS, D. MARIN TOYOS.

## STATI UNITI D'AMERICA

Governo degli Stati Uniti: proff. O. VEBLEN, R. C. ARCHIBALD, G. D. BIRKHOFF, V. SNDYER, H. F. BLICHFELDT, O. K. KELLOG.
American Mathematical Society: proff. R. C. ARCHIBALD, G. D. BIRKHOFF, H. F. BLICHFELDT, E. KASNER, O. VEBLEN, V. SNYDER.

American Telephone and. Telegraph C°, New York: M. E. C. Molina.
Bell Telephone Laboratories, New York: M. E. C. Molina.
Istitute of Technology, Cambridge (Mass.): prof H. W. Tyler.
Mathematical Association of America: prof. I. W. Joung, dr. G. A. Plimpton, proff. D. Buchanan, E. B. Stouffer, H. I. Ettlinger.
National Academy of Sciences, Washington: proff. O. Veblen, R. C. Archibald, G. D. Birkhoff, G. A. Bliss, V. Snyder, H. F. Blichfeldt, O. D. Kellog.
Brown University, Providence, (N. I.): prof. R. C. Archibald.
University of Colorado, Boulder: prof. Claribel Kendall.
Cornell University, Ithaca (N. Y.): proff. V. Snyder, A. Ranum.
Harvard University, Cambridge (Mass.): proff. D. Birkhoff, O. D. Kellog, W. G. Graustein.
John Hopkins University, Baltimore (Maryland): prof. F. Morley, dr. O. Zariski.
State University of Jowa, Jowa-City: dr. N. B. Conkwrigt.
University of Michigan, Ann Arbor: proff. L. C. Karpinski, W. B. Ford.
Northwestern University Evanston, Chicago (Ill.): proff. E. I. Moulton, F. E. Wood.
University of Pennsylvania, Philadelphia: dr. G. G. Chambers.
Princeton University, Princeton (N. J): prof. O. Veblen.
Yale University, New Haven (Conn.): prof. O. Ore, dr. U. H. Rawles.
Worcester Polytechni Institute (Worcester, Mass.): dr. A. W. Ewell.

## SVEZIA

Governo Svedese: prof. E. A. Holmgren
Università di Lund: dr. M. Riesz.
Università di Upsala: prof. E. A. Holmgren

## SVIZZERA

Governo della Confederazione Elvetica: prof. R. Fueter.
Comité National Suisse de l'Union Internationale Mathématique: prof. H. Fehr.
Enseignement Mathématique (l'), Revue Internationale: proff. A. Buhl, H. Fehr.
Société Helvétique des Sciences Naturelles: prof. H. Fehr.
Société Mathématique Suisse: proff. S. Bays, G. Juvet, W. Saxer.
Technische Hochschule (Eidgenössische), Zurich: prof. U. Plancherel, dr. L. Kollros, proff. E. Meissner, G. Polya.
Università di Basilea: prof. M. Ostrowski.
Università di Berna: prof. L. Crélier, F. Gonseth.
Università di Friburgo: prof. S. Bays
Università di Ginevra: proff. H. Fehr, R. Wavre.
Università de Lausanne: prof. G. Dumas.

Università di Neuchâtel: proff. L. G. Du Pasquier, G. Juvet.
Università di Zurigo: prof. A. Speiser.

### TURCHIA

École Supérieure d'Ingénieurs, Stamboul: prof. Kerim Bey.
Université de Stamboul: proff. H. Hamid Bey, P. Mentré

### UKRAINA

Académie des Sciences Ucraïnienne: proff. N. Kryloff, G. Pfeiffer.
Chaires de recherches scientifiques d'Ucraïne: prof. N. Kryloff.
Institut de l'Enseignement public, Kiew: proff. G. Pfeiffer, M. Krawtchouk.
Technische Hochschule, Odessa: prof. G. Souslow.

### UNGHERIA

Académie des Sciences hongroise: prof. L. Fejér.
Université de Szeged: proff. F. Riesz, A. Haar.

### URUGAY

Governo del Urugay: Console dell'Urugay a Torino.

### VENEZUELA

Governo del Venezuela: dr. F. I. Duarte.

## ELENCO DEI CONGRESSISTI

ABATE-DAGA ing. G., *Ufficio Tecnico Catastale*, Messina, Italia.
Abate-Daga sig.ª G.
d'ADHÉMAR le VICOMTE R., *Istituto di Coïmbre*, Lambersat, (Nord) Francia.
ADSHEAD prof. J. G., *Università Dalhousie*, Manchester, Inghilterra.
AFRANIO DO AMARAL, *Scuola Politecnica di Bahia*, Bahia, Brasile.
AGRONOMOF prof. F., *Università di Vladivostok*, Vladivostok, Siberia.
AKIMOFF prof. M., *Istituto delle Miniere*, Leningrad, U. S. S. R.
ALBANESE prof. G., *Università di Palermo*, Palermo, Italia.
ALBENGA prof. G., *Scuola d'Ingegneria di Bologna*, Bologna, Italia.
ALBINI on. prof. G., *Università di Bologna*, Bologna, Italia.
ALEXANDROFF prof. P., *Università Smolenska*, Smolensk, U. S. S. R.
ALEXANDRON prof. L., Athenai, Grecia.
ALVAREZ UDE prof. G., *Università di Madrid*, Madrid, Spagna.
ALVISI prof. don L., Bologna, Italia.
AMALDI prof. I., *Istituto Tecnico di Bologna*, Bologna, Italia.
AMALDI prof. U., *Scuola superiore di Architettura di Roma*, Roma, Italia.
AMATO prof. V., *Università di Catania*, Catania, Italia.
AMBROSOLI dott.ª C., Milano, Italia.
AMIRÀ prof. B., *Università di Gerusalemme*, Jerusalem, Palestina.
AMOROSO prof. L., *Università di Roma*, Roma, Italia.
ANDREINI prof. A. L., Lucca, Italia.
Andreini sig.ª I.
ANGELI dott.ª L. R., Bologna, Italia.
ARANY prof. D., *Scuola Superiore Industriale*, Budapest, Ungheria.
Arany sig.ª D.
ARCANGELI prof. A., *Università di Bologna*, Bologna, Italia.
ARCHIBALD prof. R. C., *Università di Brown*, Providence, (R. I.) U. S. A.
ARIANO ing. R., Milano, Italia.
ARMELLINI prof. G., *Osservatorio astronomico di Roma*, Roma, Italia.
Armellini dott.ª sig.ª G.
ARPINATI on. L., *Podestà di Bologna*, Bologna, Italia.
ARTOM prof. E., *Liceo Scientifico di Torino*, Torino, Italia.
ARVENGAS prof. G., *Polverificio*, Toulouse, Francia.
Arvengas sig.ª G.
ASCOLI dott. G., Torino, Italia.
AYRES prof. W. L., *Università di Texas*, Austin (Texas) U. S. A.
Ayres sig.ª J.

AZZAROLI ing. G., Lugo, Italia.
BABINI ing. J., Santa Fè, Argentina.
BACCIN dott.ª I., Roma, Italia.
Baccin sig. A.
Baccin sig. C.
BAERI prof. L., *Università di Catania*, Catania, Italia.
Baeri ing. E.
BAKER prof. B. B., *Università di Londra*, London, Inghilterra.
BALATRONI ing. F., *Scuola d'Ingegneria di Bologna*, Bologna, Italia.
BALDUS dott. R., *Scuola Politecnica*, Karlsruhe, Germania.
BALLARIN dott. S., Bologna, Italia.
BANACH prof. S., *Università di Leopoli*, Lwów, Polonia.
Banach sig.ª S.
BARBARIN prof. P., *Università di Parigi*, Paris, Francia.
BARDONE dott.ª M., Casteggio, Italia.
BARRILLON prof. E. G., *Università di Parigi*, Paris, Francia.
Barrillon sig.ª M.
BARRIOL prof. A., *Società di Statistica*, Paris, Francia.
BARY prof.ª N., *Università di Mosca*, Moskva, U. S. S. R.
BASILEA dott.ª E., Bologna, Italia.
BATH prof. F., *Università di St. Andrews*, Bath, Inghilterra.
BAUER dott.ª I., Budapest, Ungheria.
BAY ing. dott. F., Milano, Italia.
BAYS prof. S., *Università di Fribourg*, Fribourg, Svizzera.
Bays sig.ª B.
BEATI prof. A. A., *Collegio S. Luigi*, Bologna, Italia.
BEDARIDA prof. A., *Università di Genova*, Genova, Italia.
BEHNKE prof. H., *Università di Munster*, Munster, Germania.
Welke dott. H.
BELARDINELLI prof. G., *Università di Milano*, Milano, Italia.
BENEDETTI prof. P., *Istituto Tecnico di Pisa*, Pisa, Italia.
BERNAYS prof. P., *Università di Gottinga*, Göttingen, Germania.
BERNSTEIN prof. S., *Università di Charkov*, Charkov, Ukraina.
BERNSTEIN prof. V., Milano, Italia.
BERTONE prof. A., Savona, Italia.
Bertone sig.ª A.
Bertone sig. G.
BERWALD prof. L., *Università tedesca di Praga*, Praha, Cecoslovacchia.
Berwald sig. H.
BERZOLARI prof. L., *Università di Pavia*, Pavia, Italia.
Berzolari sig.ª E.

BETTI dott.ª I., Bologna, Italia.
BETTI prof. M., *Università di Bologna*, Bologna, Italia.
Betti sig.ª N.
BIANCHEDI prof. R., *Università di Buenos Aires*, Buenos Aires, Argentina.
BIEZENO prof. C. B., *Scuola Politecnica di Delft*, Delft, Olanda.
Biezeno sig.ª T.
Biezeno sig.ⁿª M. E.
BIGGIOGERO dott.ª G., *Università di Milano*, Milano, Italia.
BILIMOVITCH prof. A., *Università di Belgrado*, Beograd, Serbia.
BIRINDELLI dott. C., Mantova, Italia.
BIRKHOFF prof. G. D., *Università Harvard*, Cambridge (Mass.), U. S. A.
Birkhoff sig.ª M. G.
Birkhoff sig.ⁿª B.
Birkhoff sig. G.
BLAQUIER prof. J., *Università di Buenos Aires*, Buenos Aires, Argentina.
BLASCHKE prof. W., *Università di Amburgo*, Hamburg, Germania.
BLONDEL prof. A., *Scuola Nazionale di Ponti e Strade*, Paris, Francia.
BLUMENTHAL prof. O., *Scuola Politecnica*, Aachen, Germania.
Blumenthal sig.ª M.
BOCHNER prof. S., *Università di Monaco*, München, Germania.
BODEWIG prof. E., Köln, Germania.
BOEHM prof. C., *Scuola Politecnica di Karlsruhe*, Ettlingen, Germania.
Boehm sig.ª E.
BOHR prof. H., *Scuola Politecnica di Kopenhagen*, Kopenhagen, Danimarca.
BOHR prof. N., *Univerità di Kopenhagen*, Kopenhagen, Danimarca.
BOLLA prof. F., Olivone, Svizzera.
Bolla sig.ª A.
BOMPIANI prof. E., *Università di Roma*, Roma, Italia.
BONACINI prof. C., *Università di Modena*, Modena, Italia.
BONAVENTURA dott. P., *Istituto Tecnico di Arezzo*, Arezzo, Italia.
BONAVERI geom. G., Bologna, Italia.
BONNESEN prof. T., *Scuola Politecnica di Kopenhagen*, Kopenhagen, Danimarca.
BORDIN prof. A., *Scuola Superiore di Commercio*, Bellinzona, Svizzera.
Bordin sig.ª G.
BOREL prof. É., *Università di Parigi*, Paris, Francia.
BORINI dott. B., Forlì, Italia.
BORN prof. M., *Università di Gottinga*, Göttingen, Germania.
BORSARI G., *Direttore di Segreteria dell'Università di Bologna*, Bologna, Italia.
BORTOLOTTI prof. ENEA., *Università di Bologna*, Bologna, Italia.
Bortolotti sig.ª I.
Bortolotti sig.ⁿª E.

BORTOLOTTI prof. ETTORE., *Università di Bologna,* Bologna, Italia.
BORTOLOTTI CASONI dott.ª M., Bologna, Italia.
Casoni avv. M.
BOSSOLASCO dott. M., *Università di Torino,* Torino, Italia.
BOULAD BEY prof. F., *Istituto d'Egitto,* Cairo, Egitto.
BOURGIN prof. D. G., *Università di Illinois,* Urbana (Illinois) U. S. A.
Falck sig.ⁿᵃ M.
BRAUER prof. dott. R., *Università di Konigsberg,* Berlin, Germania.
Brauer dott.ª sig.ª I.
BREMEKAMP prof. H., Delft, Olanda.
Bremekamp sig.ª M. G.
BREUER ing. J., Haifa, Palestina.
BRINI prof. G., *Università di Bologna,* Bologna, Italia.
BRODIE prof. R. R., *Facoltà Attuaria di Scozia,* London, Inghilterra.
BROGGI prof. U., Milano, Italia.
BROMWICH prof. J. J., *Università di Cambridge,* Cambridge, Inghilterra.
BRÜCKNER prof. dott. M., Bautzen, Germania.
BRUN prof. V., *Scuola Politecnica di Norvegia,* Trondhjem, Norvegia.
BRUNETTI prof.ª R., *Università di Ferrara,* Ferrara, Italia.
BRUSOTTI prof. L., *Università di Cagliari,* Pavia, Italia.
BRYAN prof. G. H., *Società Reale di Londra,* Bordighera, Italia.
Bryan sig.ª M.
Bryan sig.ⁿᵃ M. A.
BUCHANAN prof. D. D., *Università di Londra,* London, Inghilterra.
Buchanan sig.ª M. E.
BUHL prof. A., *Università di Tolosa,* Toulouse, Francia.
BUISSERET prof. E., *Università di Bruxelles,* Bruxelles, Belgio.
Buisseret sig.ª E.
BURCKHARDT prof. J. J., Bâle, Svizzera.
BURGATTI prof. P., *Università di Bologna,* Bologna, Italia.
BYDŽOVSKÝ prof. B., *Università Karlova,* Praha, Cecoslovacchia.
Bydžovská sig.ª M.
Bydžovský sig. J.
Bydžovský sig. L.
CABRAS dott.ª A., Cagliari, Italia.
CACCIOPOLI prof. R., *Università di Napoli,* Napoli, Italia.
CAHEN dott. A., Paris, Francia.
Cahen sig.ⁿᵃ A.
CAIRNS prof. S. S., *Università Harvard,* Cambrigde (Mass.) U. S. A.
Cairns sig.ª K. H.
CALDONAZZO prof. B., *Università di Catania,* Catania, Italia.

CALLAI sig. F., Jerusalem, Palestina.
CALZONI ing. A., Bologna, Italia.
CAMINATI ing. P., Perugia, Italia.
CAMPELLI prof. L., Lucca, Italia.
CANDIDO prof. G., Galatina, Italia.
CANTELLI prof. F., *Università di Roma,* Roma, Italia.
CANTONI dott. E., Cogoleto, Italia.
    Cantoni dott.ª A.
CAPETTI prof. A., *Scuola di Ingegneria di Padova,* Padova, Italia.
CAPRIO dott. N., Lodi, Italia.
CARASSITI prof. T., *Istituto Tecnico di Bologna,* Bologna, Italia.
CARNEVALI dott.ª L., Bologna, Italia.
    Milla dott.ª F.
CARTAN prof. E., *Università di Parigi,* Paris, Francia.
    Cartan sig. J.
    Cartan sig. L.
CARTAN dott. H., Paris, Francia.
CASATI ing. E., *Scuola d'Ingeneria Navale di Genova,* Genova, Italia.
CASAZZA prof. G., Milano, Italia.
CASSINA prof. U., *Università di Milano,* Milano, Italia.
CASSINIS prof. ing. G., *Scuola d'Ingegneria di Pisa,* Pisa, Italia.
CASTELLANI dott.ª M., *Cassa Nazionale Assicurazioni Sociali,* Roma, Italia.
CASTELLANI ing. V., Bologna, Italia.
CASTELNUOVO prof. G., *Università di Roma,* Roma, Italia.
CASTRO BONEL dott. H., *Università di Madrid,* Madrid, Spagna.
CAVALLI prof. E., *Scuola d'Applicazione di Artiglieria,* Torino, Italia.
ČECH prof. E., *Università Masaryk,* Brno, Cecoslovacchia.
CERF prof G., *Università di Strasbourg,* Strasbourg, Francia.
CHAMBERS prof. G. G., *Università di Pensylvania,* Philadelphia (Pa) U. S. A.
    Chambres sig.ª G. G.
CHATELAIN dott. E., La Chaux-de-Fonds, Svizzera.
    Chatelain sig.ª H.
CHATOUNOVSKI prof. S., *Università di Odessa,* Odessa, U. S. S. R.
    Esarco sig.ª E.
    Esarco sig.ª V.
CHAZY prof. J., *Università di Parigi,* Paris, Francia.
    Chazy sig.ª J.
CHERUBINO prof. S., Napoli, Italia.
CHINAGLIA dott. P., Torino, Italia.
CHINI dott. G., *Istituto Tecnico di Ascoli Piceno,* Ascoli Piceno, Italia.

Chiribiri prof. C., Venezia, Italia.
Chou prof. P. Y., Washington, U. S. A.
Chwistek prof. L., Kraków, Polonia.
Chwistek sig.ª O.
Ciani prof. E., *Università di Firenze,* Firenze, Italia.
Cinquini sig. S., Bologna, Italia.
Cipolla prof. M., *Università di Palermo,* Palermo, Italia.
Circolo di Coltura di Bologna, Bologna, Italia.
Cisotti prof. U., *Politecnico di Milano,* Milano, Italia.
Clapier dott. C., Montpellier, Francia.
Clapier sig.ª C.
Coculescu prof. N., *Università di Bucarest,* Bucuresti, Romania.
Coculescu sig.ª L.
Coculescu sig. S.
Cohn-Vossen dott. S., Göttingen, Germania.
Colombo dott. B., *Università di Torino*, Torino, Italia.
Colombo sign.ª A.
Colombo ing. H., *Console dell' Uraguai,* Torino, Italia.
Colonna dott. A., Faenza, Italia.
Colpitts prof.ª J., *Collegio dello Stato di Jowa*, Jowa, U. S. A.
Colucci dott. A., *Università di Napoli,* Napoli, Italia.
Comessatti prof. A., *Università di Padova*, Padova, Italia.
Comessatti dott.ª sig.ª L.
Contarini ing. E., Bagnacavallo, Italia.
Conti dott. A., Firenze, Italia.
Copson prof. E. T., *Università di Edinburgo,* Edinburg, Inghilterra.
Cordara ing. S., Bologna, Italia.
Cordara ing.ª sig.ª O.
Corini prof. ing. F., *Scuola d'Ingegneria di Bologna,* Bologna, Italia.
Costanzi dott. G., Rieti, Italia.
Courant prof. R., *Università di Gottinga,* Göttingen, Germania.
Courant sig.ª N.
Sperber dott.ª E.
Craig prof. J. I., Cairo, Egitto.
Crawford prof. G. E., *Collegio Trinity,* Cambridge, Inghilterra.
Crawford sig.ª M. E. F.
Crelier prof. L. J., *Università di Berna,* Bern, Svizzera.
Crelier sig.ª J.
Criticos prof. N., *Università di Salonica,* Modling-Hinterbruhl, Austria.
Crocioni prof. comm. G., Bologna, Italia.
Crudeli prof. U., *Università di Messina,* Messina, Italia.

CUNNINGAM MCLENNAN prof. J., *Università di Toronto,* Toronto, Canadà.
CURRY prof. H. B., Cambridge, Mass., U. S. A.
    Curry sig.a H. B.
CURTI prof. ing. G., Scandiano, Italia.
CURTI dott.a P., Rocca Malatina, Italia.
CURZON prof. H. E. J., London, Inghilterra.
    Curzon sig.a E. R.
DALLA NOCE dott. G., *Università di Bologna,* Bologna, Italia.
DALLA VALLE dott.a D., Bologna, Italia.
DALLOLIO on. A., Bologna, Italia.
DA RIOS dott. ing. L. S., Padova, Italia.
DARMOIS prof. G., *Università di Nancy,* Nancy, Francia.
    Darmois sig.a L.
DEAUX prof. R., *Scuola delle Miniere,* Mons, Belgio.
DE BOER dott. F., Amsterdam, Olanda.
DE BOSDARI dei Conti nob. dott. F., Bologna, Italia.
    De Bosdari sig.a nob. B.
DE CHAURAND DE SAINT EUSTACHE gen. E., Firenze, Italia.
DE DONDER prof. T., *Università di Bruxelles,* Bruxelles, Belgio.
DE FINETTI dott. B., *Istituto Centrale di Statistica,* Roma, Italia.
DE FRANCHIS prof. comm. M., *Università di Palermo,* Palermo, Italia.
DELAUNAY prof. B. N., *Università di Leningrado,* Leningrad, U. S. S. R.
DE LA VALLÉE POUSSIN prof. C., *Università di Louvain,* Louvain, Belgio.
DELENS prof. P. C., *Liceo dell' Havre*, Le Havre, Francia.
    Delens sig.a M.
    Delens sig.na J.
DELL' AGNOLA prof. C. A., *Istituto Superiore di Scienze Economiche e Commerciali*, Venezia, Italia.
DELLA RICCIA dott. ing. A., Bruxelles, Belgio.
DE LURY prof. A., *Università di Toronto*, Toronto, Canadà.
DEL VECCHIO prof. G., *Università di Bologna*, Bologna, Italia.
DE MORSIER avv. F., *Consiglio Provinciale dell' Economia*, Bologna, Italia.
DEMOULIN prof. A., *Università di Gand*, Gand, Belgio.
DEMTCHENKO prof. B., *Università di Parigi*, Paris, Francia.
    Demtchenko sig.a S.
DENIZOT prof. A., *Università di Poznań*, Poznań, Polonia.
DENJOY prof. A., *Università di Parigi*, Paris, Francia.
    Denjoy sig.a T.
DE PESLOUAN ing. L., Paris, Francia.
    De Peslouan sig.a J.
DE SANTI ing. A., Bologna, Italia.

De Toledo prof. L. O., *Università di Madrid*, Madrid, Spagna.
De Varda dott.ª M., Bologna, Italia.
Dickstein prof. S., *Università di Varsavia*, Warszawa, Polonia.
Dingler prof. dott. H., *Università di Monaco*, München, Germania.
Di Pirro prof. G., *Istituto Superiore Postale-Telegrafico-Telefonico*, Roma, Italia.
Dispensa sig. I., Collesano, Italia.
Divisia prof. F., *Scuola Nazionale di Ponti e Strade*, Issy les Moulineaux, Francia.
  Divisia sig.ª M.
Dixon prof. A. C., *Università di Belfast*, Belfast, Irlanda.
Dobbernack prof. W., *Referendario del Ministero del Lavoro del Reich*, Berlin, Germania.
Doetsch prof. G., *Politecnico di Stuttgart*, Stuttgart, Germania.
Dombrowski prof. C., *Università di Stato della Rutenia*, Minsk, U. S. S. R.
Donati prof. L., *Scuola d'Ingegneria di Bologna*, Bologna, Italia.
Dore prof. P., *Scuola d'Ingegneria di Bologna*, Bologna, Italia.
  Dore dott.ª sig.ª M. C.
Drach prof. J., *Università di Parigi*, Paris, Francia.
Drosh dott. J., Leiden, Olanda.
Duarte ing. F. J., Genève, Svizzera.
Ducati prof. P., *Università di Bologna*, Bologna, Italia.
Dumas prof. G., *Università di Losanna*, Lausanne, Svizzera.
  Dumas sig.ª M.
Du Pasquier prof. L. G., *Università di Neuchâtel*, Neuchâtel, Svizzera.
  Du Pasquier sig.ª A.
Duran ing. Gen. V., Guatemala, Guatemala.
  Duran sig.ª P.
  Duran sig.ª R.
Duranona Vedia dott. A., La Plata, Argentina.
Dusl dott. C., *Scuola Politecnica di Praga*, Praha, Cecoslovacchia.
Edwards prof. B. A., *Università di Londra*, London, Inghilterra.
Emch prof. A., *Università di Illinois*, Urbana, (Ill.) U. S. A.
  Emch sig.ª A.
  Emch sig.na
Engel prof. dott. F., *Università di Giessen*, Giessen, Germania.
  Engel sig.ª C.
Enriques prof. F., *Università di Roma*, Roma, Italia.
Escobar prof. T. M., *Scuola Industriale*, Gijon, Spagna.
Fabbri dott. E., *Istituto Tecnico di Modena*, Modena, Italia.
Faelli sig.na L., Langhirano, Italia.
Fano dott.ª E., Bologna, Italia.

FANO prof. G., *Università di Torino*, Torino, Italia.
Fano sig.a R.
FANTAPPIÈ prof. L., *Università di Cagliari*, Cagliari, Italia.
FARAGÒ prof. A., *Ginnasio di Budapest*, Budapest, Ungheria.
FEA sig.na M. T., Roma, Italia.
Fea sig.na M. C.
Fea sig.na O.
FÉDOROFF prof. V. S., *Università di Mosca*, Moskva, U. S. S. R.
FEHR prof. H., *Università di Ginevra*, Genève, Svizzera.
Fehr sig.na A.
FEJÉR dott. L., *Università di Budapest*, Budapest, Ungheria.
FEKETE prof. dott. M., Budapest, Ungheria.
Fekete sig.na E.
FERMI prof. E., *Università di Roma*, Roma, Italia.
FIELDS prof. J. C., *Università di Toronto*, Toronto, Canadà.
FINZI ing. dott. B., Milano, Italia.
FINZI prof. L., *Politecnico di Aquisgrana*, Aachen, Germania.
Finzi sig.na E.
FINZI CONTINI ing. B., Bologna, Italia.
Finzi Contini dott. A.
Finzi Contini sig.na B.
Finzi Contini sig.na M.
FIORENTINI dott. P., Forlì, Italia.
FIORINI ing. G., Bologna, Italia.
FISHER prof. R. A., Rothamsted (Herts), Inghilterra.
FITE prof. B., *Università di Columbia*, New York, U. S. A.
FLAMACHE prof. L., *Università di Bruxelles*, Bruxelles, Belgio.
Flamache sig.a L.
Flamache sig.na
FLAMANT prof. P., *Università di Clermont-Ferrand*, Clermont-Ferrand, Francia.
Flamant sig.a P.
FLORA prof. F., *Università di Bologna*, Bologna, Italia.
FOÀ ing. E., *Scuola d'Ingegneria di Bologna*, Bologna, Italia.
FONTINOY prof. G., *Ateneo Reale di Hasselt*, Waremme, Belgio.
FORTESCUE prof. C. L., Pittsburgh, Pa, U. S. A.
FORTINI dott. R., *Università di Firenze*, Firenze, Italia.
FOWLER prof. R. H., *Università di Cambridge*, Cambrigde, Inghilterra.
FOX prof. C., London, Inghilterra.
FRAENKEL prof. A., *Università di Kiel*, Kiel, Germania.
FRANCESCHI prof. O., Parma, Italia.
FRANCIA dott.a A., Ferrara, Italia.

FRANCIA comm. dott. T., Bologna, Italia.
FRANK prof. M. L., *Istituto Pedagogico*, Simpheropol, U. S. S. R.
FRANKL dott. F., Wien, Austria.
FRÉCHET prof. M., *Università di Strasbourg*, Strasbourg, Francia.
Fréchet sig.[a] S.
FRIEDRICH dott. K., Aachen, Germania.
FUBINI prof. G., *Università di Torino*, Torino, Italia.
Fubini sig.[a] A.
FUETER prof. R., *Università di Zurigo*, Zürich, Svizzera.
FURCH prof. R., *Università di Rostock*, Rostock, Germania.
FURLANI prof. G., Trieste, Italia.
Furlani sig.[a] M.
FUWA prof. Y., Giappone.
GALLENO prof. P., *Seminario Vescovile*, Sarzana, Italia.
GALLIANI ing. R., Bologna, Italia.
GALVANI prof. L., *Istituto Centrale di Statistica*, Roma, Italia.
GEPPERT dott. H., *Università di Giessen*, Giessen, Germania.
GEPPERT sig.[na] M. P., Breslau, Germania.
GÉRARDIN prof. A., Nancy, Francia.
GÉRARDIN sig. R., Nancy, Francia.
GÉRARDIN sig. P., Nancy, Francia.
GERBALDI prof. F., *Università di Pavia*, Pavia, Italia.
GHERARDELLI dott. G., Torino, Italia.
GHIGI prof. A., *Università di Bologna*, Bologna, Italia.
GHIRON ing. M., Torino, Italia.
GIANFRANCESCHI prof. G., *Università Gregoriana*, Roma, Italia.
GINGRICH prof. C. H., *Editore del « Popular Astronomy »*, Northfield, U. S. A.
Gingrich sig.[a] M.
Gingrich sig.[na] G.
GINI prof. C., *Istituto Centrale di Statistica*, Roma, Italia.
GIORGI prof. G., *Università di Cagliari*, Cagliari, Italia.
GIULIANO S. E. on. B., Bologna, Italia.
GLEEN prof. O. E., *Università di Pennsylvania*, Winthrop, Maine, U. S. A.
GNESOTTO prof. T., *Università di Padova*, Padova, Italia.
GODEAUX prof. L. A., *Università di Liegi*, Liège, Belgio.
GOLDZIHER dott. K., *Politecnico di Budapest*, Budapest, Ungheria.
Goldziher sig.[a] E.
GONELLA dott. G. B., *R. Liceo Scientifico di Genova*, Genova, Italia.
GONSETH prof. F., *Università di Berna*, Bern, Svizzera.
Gonseth sig.[a] F.
GONZALES QUIJANO prof. D. P. M., *R. Accademia delle Scienze*, Madrid, Spagna.

GORINI ing. F., *Scuola d'Ingegneria di Bologna*, Bologna, Italia.
GOT prof. L. A. T., *Liceo Pasteur*, Paris, Francia.
Got. sig.a A. F.
GOTAB dott. S., *Accademia delle Miniere*, Kraków, Polonia.
GRAFFI dott. D., *Scuola d'Ingegneria di Bologna*, Bologna, Italia.
Graffi prof. A.
GRAMMEL prof. R., *Politecnico di Stuttgart*, Stuttgart, Germania.
GRANDJOT dott. K., *Università di Gottinga*, Göttingen, Germania.
Grandjot sig.a G.
Gunther sig.na
GRAUSTEIN prof.a M. C., *Collegio Wellesley*, Cambridge (Mass.) U. S. A.
GRAUSTEIN prof. W. C., *Università Harvard*, Cambridge (Mass.) U. S. A.
GRAY prof. J. G., *Università di Glasgow*, Glasgow, Scozia.
Gray sig.na I.
GRECO prof. ing. M., *Scuola d'Ingegneria di Palermo*, Palermo, Italia.
GREENWOOD prof. T., *Società Geografica*, London, Inghilterra.
Greenwood sig.a N.
GREGORI ing. A., Travo, Italia.
GRELL prof. H., *Università di Jena*, Jena, Germania.
GROSSMANN prof. J., *Istituto Tecnico*, Haifa, Palestina.
GRUZEWSKI dott. A., *Scuola Politecnica di Varsavia*, Warszawa, Polonia.
GRUZEWSKA dott.a A., Warszawa, Polonia.
GUADAGNINI S. E. gr. uff. G., *Prefetto di Bologna*, Bologna, Italia.
GUARDUCCI prof. F., *Università di Bologna*, Bologna, Italia.
GUGNONI dott.a T., Parma, Italia.
GUIDETTI prof. R., Bologna, Italia.
GUIDUZZI sig.na B., Bologna, Italia.
GULDBERG prof. A., *Università di Oslo*, Oslo, Norvegia.
Guldberg sig.a E.
Guldberg sig.na E.
GUMBEL prof. E. J., *Università di Heidelberg*, Heidelberg, Germania.
GUNTHER prof. N. M., *Accademia delle Scienze*, Leningrad, U. S. S. R.
GUYOT prof. E., Neuchâtel, Svizzera.
HAAR prof. A., *Università di Szeged*, Szeged, Ungheria.
HADAMARD prof. J., *Accademia delle Scienze*, Paris, Francia.
HAGSTROEM dott. K. G., Stockholm, Svezia.
Hagstroem sig.a A.
Armfelt bar.a M.
HAHN prof. H., *Università di Vienna*, Wien, Austria.
Hahn sig.a N.
HARDY prof. G. H., *Università di Oxford*, Oxford, Inghilterra.

HARKÁNYI dott. B. B., *Università di Budapest*, Budapest, Ungheria.
HÄRLEN dott. H., *Eislingen Fils*, Germania.
HARTOGS dott. F., *Università di Monaco*, München, Germania.
HASKELL prof. M. W., *Università di California*, Berkeley, California, U. S. A.
    Brown sig.na I.
HATZIDAKIS prof. N., *Università di Atene*, Athenai, Grecia.
HAUPT prof. O., *Università di Erlangen*, Erlangen, Germania.
    Haupt sig.a E.
HAZLETT prof. O. C., *Università di Illinois*, Illinois, U. S. A.
HEEGAARD prof. P., *Università di Oslo*, Oslo, Norvegia.
HERGLOTZ prof. G., *Università di Gottinga*, Göttingen, Germania.
HILBERT prof. D., *Università di Gottinga*, Göttingen, Germania.
    Hilbert sig.a K.
    Ruffmann sig.na M.
HIRSCH dott. R., Göttingen, Germania.
HIRST prof. D. M., Birmingham, Inghilterra.
HLAVATY dott. V., *Università di Praga*, Praha, Cecoslovacchia.
HOBORSKI dott. A., *Accademia delle Miniere*, Kraków, Polonia.
    Hoborska sig.a A.
HOFFMANN dott. P., Wien, Austria.
HOLMGREN prof. E., *Università di Upsala*, Upsala, Svezia.
HOPF dott. prof. H., Göttingen, Germania.
HOPPE prof. E., Göttingen, Germania.
HORN D'ARTURO prof. G., *Università di Bologna*, Bologna, Italia.
HOSTINSKÝ prof. B., *Università di Brünn*, Brno, Cecoslovacchia.
HOVGAARD prof. W., *Istituto di Tecnologia*, Cambridge, Mass., U. S. A.
HUDE prof. E., Kopenhagen, Danimarca.
    Hude sig.a H.
HUMBERT prof. P., *Università di Montpellier*, Montpellier, Francia.
    Humbert. sig.a P.
HUSNY prof. HAMID BEY, *Università di Costantinopoli*, Stamboul, Turchia.
    Husny Hamid sig.a A.
    Husny Hamid sig. D.
HUSSON prof. E., *Università di Nancy*, Nancy, Francia.
    Husson sig.a M.
    Husson sig.na O.
INGHAM prof. A. E., Leeds, Inghilterra.
INSOLERA prof. F., *Istituto di Scienze Economiche e Commerciali*, Torino, Italia.
ISOLANI LUPARI conte dott. G., Bologna, Italia.
    Isolani cont.a C.
ISTITUTO TECNICO DI MODENA, Modena, Italia.

IVALDI ing. G., Genova, Italia.
IVANOFF dott. A., *Società d'assicurazione dei Funzionari Bulgari*, Sofija, Bulgaria.
JANCZEWSKI prof. S. A., *Istituto Pedagogico di Leningrado*, Leningrad, U. S. S. R.
JAROSLAV dott. J., Praha, Cecoslovacchia.
JEFFERSON prof.[a] M. A., *Collegio di Cambridge*, New York, Inghilterra.
Jefferson sig. W.
JORDAN prof. C., *Università di Budapest*, Budapest, Ungheria.
Jordan sig. A.
JORDAN dott. H., Wiesbaden, Germania.
JOURAVSKI prof. A. M., *Istituto delle Miniere*, Leningrad, U. S. S. R.
JUEL prof. dott. C., Copenhagen, Danimarca.
JULIA prof. G. M., *Università di Parigi*, Paris, Francia.
JUVET prof. G., *Università di Neuchatel*, Neuchatel, Svizzera.
Juvet sig.[a] G.
KACZMARZ prof. S., *Istituto Politecnico di Leopoli*, Lwòw, Polonia.
KAKEYA prof. S., *Scuola Normale Superiore*, Tokyo, Giappone.
KÁLMÁN ing. prof. E., Domodossola, Italia.
KALMÁR prof. L., *Università di Szeged*, Szeged, Ungheria.
KAMITZ dott. H., Wien, Austria.
KAMPÉ DE FÉRIET prof. J., *Università di Lilla*, Lille, Francia.
Kampé de Fériet sig. G.
KÁRMÁN prof. T., *Istituto Politecnico di Aquisgrana*, Aachen, Germania.
Kárman sig.[a] Dott.[a] M.
Kármán sig.[na] Dott.[a] J.
KARPINSKI prof. L. C., *Università di Michigan*, Ann Arbor, Mich., U. S. A.
KASNER prof. E., *Università di Columbia*, New York, U. S. A.
KAWAGUCHI dott. A., *Università Imperiale di Tokyo*, Tokyo, Giappone.
KAZARINOFF prof. D. K., *Università di Michigan*, Ann Arbor, Mich., U. S. A.
KELLOGG prof. O. D., *Università Harvard*, Cambridge, U. S. A.
Kellogg sig.[a] E.
Kellogg sig.[na] M.
KEMPISTY prof. S., *Università di Wilno*, Wilno, Polonia.
Kempistowa sig.[a] E.
KENDALL prof. C., *Università di Colorado*, Boulder, Colorado, U. S. A.
KENDALL sig.[na] F., Boulder, Colorado, U. S. A.
KERÉKIÁRTÓ prof. B., *Università di Szeged*, Szeged, Ungheria.
KÉRIM prof. A., *Scuola d'ingegneria di Costantinopoli*, Stamboul, Turchia.
KHINTCHINE prof. A., *Università di Mosca*, Moskva, U. S. S. R.
Khintchine sig.[a] N.

KIRTSIS dott. J. P., Göttingen, Germania.
KISTLER prof. H., Bienne, Svizzera.
Kistler sig.[a] G.
KNASTER prof. B., *Università di Varsavia*, Warszawa, Polonia.
Knaster sig.[a] M.
KNOPP prof. K., *Università di Tübingen*, Tübingen, Germania.
KOEBE prof. P., *Università di Leipzig*, Leipzig, Germania.
KOEPPLER prof. H., Berlin, Germania.
KOLLROS prof. L., *Scuola Politecnica Federale*, Zürich, Svizzera.
Kolros sig.[a] L.
KOLOSSOFF prof. G., *Università di Leningrado*, Leningrad, U. S. S. R.
Kolossoff sig.[a] E.
KOLOVRAT prof. G., *Università di Parigi*, Paris, Francia.
Kolovrat sig.[a] N.
KONDO prof. J., *Collegio Commerciale*, Yamaguchi, Giappone.
KÖNIG prof. D., *Politecnico di Budapest*, Budapest, Ungheria.
KOŘINEK dott. V., Praha, Cecoslovacchia.
KORONS prof. Y., *Università di Praga*, Praha, Cecoslovacchia.
KORZYBSKI prof. A., New York, U. S. A.
KOTCHINE dott. N. E., *Osservatorio Geofisico Centrale*, Leningrad, U. S. S. R.
KÖTHE dott. G., Graz, Austria.
KOVANKO prof. A., *Università di Baku*, Baku, U. S. S. R.
KRAWTCHOUK prof. M., *Scuola Politecnica*, Kiev, U. S. S. R.
KRYLOFF prof. N., *Accademia delle Scienze d' Ucraina*, Kiev, U. S. S. R.
KURATOWSKI prof. C., *Scuola Politecnica*, Warszawa, Polonia.
KUSAKABE prof. J., *Scuola Politecnica*, Kyoto, Giappone.
KÜRSCHÁK prof. J., *Scuola Politecnica*, Budapest, Ungheria.
Kürschák sig.[a] T.
KUZMIN prof. R., *Istituto Politecnico*, Leningrad, U. S. S. R.
LABAN prof. V., Issy, Francia.
LABOCCETTA ing. L., Roma, Italia.
Laboccetta sig.[a] R.
Laboccetta sig.[na] G.
LAGUNOFF prof. B., *Ufficio di Statistica di Kiev*, Kiev, U. S. S. R.
LAMBERTI dott. F., Genova, Italia.
LAMENZA ing. F., *Seminario Matematico Argentino*, Buenos Aires, Argentina.
LAMPARIELLO dott. G., *Università di Roma*, Roma, Italia.
LANDAU prof. E., *Università di Gottinga*, Göttingen, Germania.
Landau sig.[a] M.
Landau sig.[na] C.
LANGE-NIELSEN prof. F., Oslo, Norvegia.

LANZAVECCHIA ing. P., Pesaro, Italia.
LARMOR prof. J., *Università di Cambridge*, Cambridge, Inghilterra.
LAURA prof. E., *Università di Padova*, Padova, Italia.
LAUZANNE prof.ª S., *Liceo Victor Hugo*, Paris, Francia.
Lauzanne sig.ⁿᵃ B.
Lauzanne sig.ⁿᵃ E.
LAVRENTIEFF prof. M., *Università di Mosca*, Moskva, U. S. S. R.
LAZZERI prof. G., *Accademia Navale*, Livorno, Italia.
LEHR dott.ª M., Interlaken, Svizzera.
LEICHT S. E. prof. P. S., *Università di Bologna*, Bologna, Italia.
LEJA prof. F., *Scuola Politecnica di Varsavia*, Warszawa, Polonia.
Leja sig.ª J.
LEJNEEKS prof. E., *Università di Riga*, Riga, Lettonia.
LELLI ing. M., *Scuola d'Ingegneria di Bologna*, Bologna, Italia.
Lelli sig.ª M.
LENNERTZ dott. J., *Scuola Politecnica*, Aachen, Germania.
LENZI don S., Bentivoglio, Italia.
LEONARDI dott. G., Reggio Calabria, Italia.
LEONARDI ing. R., Bologna, Italia.
LE ROUX prof. J., *Università di Rennes*, Rennes, Francia.
LE STOURGEON prof.ª F. E., *Università del Kentucky*, Lexington, U. S. A.
LETTENMEYER dott. F., *Università di Monaco*, München, Germania.
Lettenmeyer sig.ª K.
LEVI prof. B., *Università di Parma*, Parma, Italia.
LEVI-CIVITA prof. T., *Università di Roma*, Roma, Italia.
Levi-Civita sig.ª L.
LEVY prof. H., *Collegio Imperiale delle Scienze*, London, Inghilterra.
Levy sig.ª M. A.
LÉVY prof. P., *Scuola Politecnica*, Paris, Francia.
Lévy sig.ª S.
Lévy sig.ª B.
LEWIS prof. T., *Università del Wales*, Wales, Inghilterra.
LEWY dott. H., Göttingen, Germania.
Goppert dott.ª sig.ⁿᵃ M.
LICHTENSTEIN prof. L., *Università di Leipzig*, Leipzig, Germania.
Lichtenstein sig.ª prof.ª S.
LIEBMANN prof. H., *Università di Heidelberg*, Heidelberg, Germania.
Liebmann sig.ª prof.ª H.
LIETZMANN prof. W., *Università di Gottinga*, Göttingen, Germania.
LINDNER sig. E., Reggio Emilia, Italia.
LIPKA dott. S., *Università di Szeged*, Szeged, Ungheria.

LIPORESI ing. A., Bologna, Italia.
LIVENS prof. G. H., *Università di Cardiff*, Cardiff, Inghilterra.
LODI dott. mons. E., *Vescovo di Messene*, Bologna, Italia.
LOMBARDI sig. C., Vercelli, Italia.
LOMNICKI prof. A., *Scuola Politecnica di Leopoli*, Lwów, Polonia.
LOMNICKI prof. Z., Lwów, Polonia.
LOPERFIDO ing. A., *Istituto Geografico Militare*, Firenze, Italia.
LORI prof. F., *Scuola d'Ingegneria di Padova*, Padova, Italia.
LORIA prof. G., *Università di Genova*, Genova, Italia.
Loria sig.a I.
LUKASIEWICZ prof. J., *Università di Varsavia*, Warszawa, Polonia.
LUSIN prof. N., *Università di Mosca*, Moskva, U. S. S. R.
Lusin sig.a N.
LUSTERNIK prof. L., *Università di Mosca*, Moskva, U. S. S. R.
LUZZATTO FEGIR prof. P., *Università di Bologna*, Bologna, Italia.
MACKIE sig.a E., Glasgow, Inghilterra.
MADIA dott.a G., Napoli, Italia.
Madia prof.a C.,
MAGGI prof. G. A., *Università di Milano*, Milano, Italia.
MAJOCCHI prof. D., *Università di Bologna*, Bologna, Italia.
MAJORANA prof. Q., *Università di Bologna*, Bologna, Italia.
MAMBRIANI dott. A., *Università di Bologna*, Bologna, Italia.
Mambriani sig.na S.
MANARESI dott.a I., Bologna, Italia.
MANARINI dott. M., *Università di Bologna*, Bologna, Italia.
MANDELBROJT prof. S., *Università di Lilla*, Lille, Francia.
Mandelbrojt sig.a G.
MANZINI rag. R., Bologna, Italia.
MARCH prof. L., Paris, Francia.
MARCHESI ing. G., Bologna, Italia.
MARCOLONGO prof. R., *Università di Napoli*, Napoli, Italia.
Marcolongo sig.a M.
MARONI prof. A., *Istituto Tecnico*, Firenze, Italia.
Maroni sig.na B.
MAROTTE prof. F., *Liceo Carlomagno*, Paris, Francia.
Marotte sig.a A.
MARTINETTI prof. V., *Università di Messina*, Messina, Italia.
Martinetti sig. F.
MASETTI ing. E., Bologna, Italia.
Masetti sig.a A.
MASETTI ZANNINI ing. conte A., Bologna, Italia.

MASOTTI ing. A., Milano, Italia.
MASPOLI prof. d. G., *Seminario di Lugano*, Lugano, Svizzera.
MASSÉ prof. P., *Scuola Politecnica*, Paris, Francia.
Massé sig.ª J.
MATTIOLI dott. I., Bologna, Italia.
MAZURKIEWICZ prof. S., *Università di Varsavia*, Warszava, Polonia.
MAZZELLI prof.ª C., *Istituto Magistrale*, Bologna, Italia.
MC CONNELL prof. A. G., *Università di Dublino*, Dublin, Irlanda.
MC DONALD prof. H. M., *Università di Aberdeen*, Aberdeen, Inghilterra.
MEIDELL prof. B., *Università di Oslo*, Oslo, Norvegia.
MEISSNER prof. E., *Scuola Politecnica di Zurigo*, Zürich, Svizzera.
MELLON ing. J., *Ministero della Marina*, Paris, Francia.
MENCHOFF prof. D., *Università di Mosca*, Moskva, U. S. S. R.
MENGER prof. K., *Università di Vienna*, Wien, Austria.
MENTRÉ prof. P., *Università di Nancy*, Nancy, Francia.
MESNAGER prof. A., *Istituto di Francia*, Paris, Francia.
MESSINA prof. I., *Cassa Nazionale Assicurazioni Sociali*, Roma, Italia.
MEYER dott. K., Koln, Germania.
MIGNOSI prof. G., *Università di Palermo*, Palermo, Italia.
MILLOUX prof. H. P., *Università di Strasburgo*, Strasbourg, Francia.
Milloux sig.ª M. R.
MILNE-THOMSON prof. L. M., *Collegio Navale*, Greenwich, Inghilterra.
MINETTI dott. S., *Università di Roma*, Roma, Italia.
Minetti sig.ª C.
MIRIMANOFF prof. D., *Università di Ginevra*, Genève, Svizzera.
MIURA prof. Y., *Istituto degli Attuari del Giappone*, Kanagawaken, Giappone.
Shinowara sig.ª Y.
MOLINA prof. E. C., *Compagnia Americana Telefoni e Telegrafi*, New York, U. S. A.
Molina sig.ª V.
MOLLERUP prof. J., *Scuola Politecnica di Copenhagen*, Kopenhagen, Danimarca.
MONARI ing. G., Bologna, Italia.
MONTUSCHI ing. C., *Ferrovie dello Stato*, Bologna, Italia.
MORDELL prof. L. J., *Università di Manchester*, Manchester, Inghilterra.
Mordell sig.ª M.
Mordell sig. F. K.
Mordell sig. D. L.
MORGENSTERN prof. O., *Università di Vienna*, Wien, Austria.
MOSER prof. C., *Università di Berna*, Bern, Svizzera.
MOSSINI prof.ª D., *Istituto Magistrale*, Parma, Italia.
MOULTON prof. E. J., *Università di Illinois*, Evaston, U. S. A.

MOUSKHÉLICHVILI prof. N., *Università di Tiflis*, Tiflis. U. S. S. R.
MUGGIA prof. A., *Scuola d'Ingegneria di Bologna*, Bologna, Italia.
MUGGIA sig. G., Bologna, Italia.
MURNAGHAN prof. F., *Università John Hopkins*, Baltimore, U. S. A.
MUZZIOLI ing. L., *Università di Modena*, Modena, Italia.
MYLLER prof. A., *Università di Jassi*, Jasi, Romania.
MYLLER-LEBEDEFF prof.a V., *Università di Jassi*, Jasi, Romania.
MYRBERG prof. P. J., *Politecnico di Finlandia*, Helsinki, Finlandia.
NAGELL prof. F., *Università di Oslo*, Oslo, Norvegia.
NALLI prof.a P., *Università di Catania*, Catania, Italia.
    Nalli prof.a B.
NANNI dott.a M., Bologna, Italia.
NARASINGA RAO prof. A., *Collegio della Presidenza*, Madras, India.
NEUGEBAUER dott. O., *Università di Gottinga*, Göttingen, Germania.
    Neugebauer sig.a G.
NEUMANN dott. G. V., *Università di Berlino*, Berlin, Germania.
NEVANLINNA prof. R. H., *Università di Helsingfors*, Helsinki, Finlandia.
NEVILLE prof. E. H., *Università di Reading*, Reading, Inghilterra.
    Neville sig.a A. M. E.
    Neville sig.a E. H.
NEWMAN prof. M. H. A., *Collegio di St. John*, Cambridge, Inghilterra.
NEYMAN dott. J., *Università di Varsavia*, Warszawa, Polonia.
    Neyman sig.a O.
NICOLADZÉ prof. G., *Università di Tiflis*, Tiflis, U. S. S. R.
    Nicoladzé sig.a G.
NICOLETTI prof. O., *Università di Pisa*, Pisa, Italia.
NICOLOSI ing. prof. G., Roma, Italia.
NIKLIBORC prof. L., *Scuola Politecnica di Leopoli*, Lwów, Polonia.
NIKODYM dott. O., *Università di Cracovia*, Kraków, Polonia.
NIKODYM dott.a S., Kraków, Polonia.
NOBILE prof. V., *Università di Napoli*, Napoli, Italia.
NOETHER prof. E., *Università di Gottinga*, Göttingen, Germania.
NÖRLUND prof. N. E., *Università di Copenhagen*, Kopenhagen, Danimarca.
NORTON prof. H. T. J., London, Inghilterra.
OBRECHKOFF prof. N., *Università di Sofia*, Sofija, Bulgaria.
OKADA prof. Y., *Università Imperiale di Tokyo*, Tokyo, Giappone.
    Nakajuna prof. S.
ONEGLIO dott.a T., Torino, Italia.
ONICESCU prof. O., *Università di Bucarest*, Bucuresti, Romania.
    Onicescu sig.a L.
ONOFRI dott. L., *Università di Bologna*, Bologna, Italia.

ORBEC dott. M. N., *dell' Università di Mosca*, Paris, Francia.
ORE prof. O., *Università di Yale*, New Haven, U. S. A.
OSTROWSKI prof. A., *Università di Basel*, Basel, Svizzera.
OTTAVIANI dott. R., *Fondiaria Vita*, Firenze, Italia.
OTTOLENGHI dott.ª B., *Istituto magistrale*, Mantova, Italia.
PADOA prof. A., *Scuola d'Ingegneria Navale*, Genova, Italia.
  Padoa sig.ª E.
  Padoa dott. B.
  Padoa sig.ⁿª G.
PALAZZO dott.ª E., Roma, Italia.
  Palazzo sig.ª F.
PALERMO prof. D., *Liceo di Agrigento*, Agrigento, Italia.
PALOZZI sig. G., Bologna, Italia.
PANETTI prof. M., *Politecnico di Torino*, Torino, Italia.
PAPAIOANNOU ing. C., *Ferrovie dello Stato Greco*, Athenai, Grecia.
  Papaioannou sig.ª C.
PARFENTIEFF prof. N., *Università di Kazan*, Kazan, U. S. S. R.
PARTENGO dott.ª C., Bologna, Italia.
PARVOPASSU prof. C., *Scuola d'Ingegneria di Padova*, Padova, Italia.
PASCAL prof. M., Napoli, Italia.
PASTORI dott.ª M., *Università di Milano*, Milano, Italia.
  Membretti sig.ⁿª M.
PEANO prof. G., *Università di Torino*, Torino, Italia.
PEDERSEN prof. J. J., *Società di Assicurazioni*, Kopenhagen, Danimarca.
  Pedersen sig.ª B.
  Pedersen sig.ª A.
  Pedersen sig.ⁿª N.
PEREZ DEL PULGAR prof. J. A., Madrid, Spagna.
PERNA prof. A., *Ministero dell' Istruzione*, Roma, Italia.
PERRON prof. O., *Università di Monaco*, München, Germania.
  Perron sig.ª H.
  Perron sig.ⁿª H.
PETR prof. K., *Università di Praga*, Praha, Cecoslovachia.
  Petrová sig.ª B.
  Petrová dott.ª J.
PETROVITCH prof. M., *Università di Belgrado*, Beograd, Jugoslavia.
PETRUCCI dott. G., *Assicurazioni Generali*, Trieste, Italia.
PFEIFFER prof. F., *Politecnico di Stuttgart*, Stuttgart, Germania.
  Pfeiffer sig.ª F.
PFEIFFER prof. F. G., *Università di Kiev*, Kiev, Ucraina, U. S. S. R.
PIAZZOLLA BELOCH prof.ª M., *Università di Ferrara*, Ferrara, Italia.

PIAZZOLLA dott. R., Roma, Italia.
PICONE prof. M., *Università di Napoli*, Napoli, Italia.
Picone sig.[a] J.
PIETRA prof. G., *Università di Padova*, Padova, Italia.
PINCHERLE prof. S., *Università di Bologna*, Bologna, Italia.
Pincherle sig.[a] N.
Pincherle sig. L.
PINI dott.[a] E., *Università di Bologna*, Bologna, Italia.
PINI avv. G., Bologna, Italia.
PIVA dott.[a] A., Ferrara, Italia.
PLANCHER prof. G., *Università di Bologna*, Bologna, Italia.
PLANCHEREL prof. M., *Scuola Politecnica Federale*, Zürich, Svizzera.
PLANS FREYRE prof. J. M., *Università di Madrid*, Madrid, Spagna.
PLIMPTON prof. G. A., *Università di New York*, New York, U. S. A.
Plimpton sig.[a] F. H.
PODETTI prof. F., *Liceo Scientifico di Forlì*, Forlì, Italia.
POGÁNY prof. B., *Politecnico di Budapest*, Budapest, Ungheria.
Pogány sig.[a] E.
Pogány sig.[na] J.
POGGI prof. F., *Liceo di Genova*, Genova, Italia.
Poggi sig.[na] C.
Poggi sig.[na] O.
PÓKA PIVNY prof. A., *Accademia Utca*, Budapest, Ungheria.
PÓKA PIVNY dott. B., Budapest, Ungheria.
Póka Pivny sig.[a] B.
POLETTI ing. L., Pontremoli, Italia.
Poletti sig.[na] A.
Poletti sig. G.
POLI Dott.[a] C. R., Firenzuola, Italia.
PÓLYA prof. G., *Scuola Politecnica Federale*, Zürich, Svizzera.
Pólya sig.[a] S.
POMEY prof. L., *Scuola Politecnica*, Paris, Francia.
POMINI ing. O., Castellanza, Italia.
POPOFF prof. K., *Università di Sofia*, Sofija, Bulgaria.
POPOVICI prof. C., *Università di Jassi*, Jasi, Romania.
Popovici sig.[a] M. C.
PORCU TORTINI dott.[a] E., Cagliari, Italia.
Porcu Tortini sig.[na] B.
PORRO Gen. C., Senatore, Rovello, Italia.
PÖSCHL prof. T., *Politecnico di Karlsruhe*, Karlsruhe, Germania.
Pöschl sig.[a] M.

PRAOLINI dott.ª O., *Istituto Magistrale*, Lodi, Italia.
PRASAD prof. G., *Università di Calcutta*, Calcutta, India.
PRIWALOFF prof. J., *Università di Mosca*, Moskva, U. S. S. R.
PROSCIUTTO prof. A., *Scuola d'Ingegneria di Bologna*, Bologna, Italia.
PRZEBORSKI prof. A., *Università di Varsavia*, Warszawa, Polonia.
PUJÓ dott. A. R., Madrid, Spagna.
PUPPINI prof. U., *Scuola d'Ingegneria Bologna*, Bologna, Italia.
QUIQUET prof. A., *Istituto degli Attuari Francesi*, Paris, Francia.
RACLIS prof. R., *Università di Bucarest*, Bucuresti, Romania.
RADEMACHER prof. H., *Università di Breslavia*, Breslau, Germania.
Rademacher, sig.ª S.
RADÒ prof. T., *Università di Szeged*, Szeged, Ungheria.
RADON Prof. J., *Università di Erlangen*, Erlangen, Germania.
RADOS prof. G., *Politecnico di Budapest*, Budapest, Ungheria.
RAINICH Prof. G. H., *Università di Michigan*, Ann Arbor, U. S. A.
RAMBO prof.ª S. M., Northampton, Mass., U. S. A.
RAMPINI dott. M., Bologna, Italia.
RAWLES prof. T. H., Yale, U. S. A.
REIDEMEISTER prof. K., *Università di Königsberg*, Königsberg, Germania.
Reidemeister sig.ª E.
REINER Prof. M., *Politecnico di Gerusalemme*, Jerusalem, Palestina.
RELLA prof. T., *Università di Graz*, Graz, Austria.
RELLICH dott. F., Göttingen, Germania.
REY PASTOR prof. J., *Università di Madrid*, Madrid, Spagna.
RIABOUCHINSKY dott. D., Paris, Francia.
Riabouchinsky sig.ª V.
RICCI sig.ⁿª L., Bologna, Italia.
RICCI dott. G., Firenze, Italia.
RIEDEL sig. L., *Riunione Adriatica di Sicurtà*, Trieste, Italia.
RIESZ prof. F., *Università di Szeged*, Szeged, Ungheria.
RIESZ prof. M., *Università di Lund*, Lund, Svezia.
RIGHI ing. A., *Associazione Elettrotecnica Italiana*, Bologna, Italia.
RIPAMONTI prof.ª M., *Liceo Ginnasio*, Bologna, Italia.
RISSER prof. R., *Conservatorio Arti e Mestieri*, Paris, Francia.
Risser sig.ª L. L.
ROMANOVSKY prof. V., *Università di Taškent*, Taškent, U. S. S. R.
RONCO prof. N., *Scuola d'Ingegneria Navale*, Genova, Italia.
ROSATI prof. C., *Università di Pisa*, Pisa, Italia.
ROSENBLATT prof. A., *Università di Cracovia*, Kraków, Polonia.
ROSENFELD ing. J., Haifa, Palestina.

ROSENTHAL prof. A., *Università di Heidelberg*, Heidelberg, Germania.
ROQUES prof. R. M., Rio de Janeiro, Brasile.
ROY ing. R., *Scuola Nazionale di Ponti e Strade*, Paris, Francia.
RUGGERI prof. C., *Liceo d' Urbino*, Urbino, Italia.
RUZIEWICZ prof. S., *Università di Leopoli*, Lwów, Polonia.
RYCHLIK prof. K., *Scuola Politecnica*, Praha, Cecoslovacchia.
SABBATINI dott.a E., Modena, Italia.
SADDLER prof. W., *Università di St. Andrews*, St. Andrews, Inghilterra.
Saddler sig.a M.
SAKELLARION prof. N., *Università di Atene*, Athenai, Grecia.
SAKS prof. S., *Università di Varsavia*, Warszawa, Polonia.
SALVIATI dott.a G., Bologna, Italia.
Salviati sig.na C.
SANDRI prof. G., *Liceo di Modena*, Modena, Italia.
SANNIA prof. G., *Università di Napoli*, Napoli, Italia.
SANSONE prof. G., *Università di Firenze*, Firenze, Italia.
SANTACROCE dott. G., Spezia, Italia.
SANT' ANDREA sig.na M., Bologna, Italia.
Sant' Andrea sig.na A.
SARTORI prof. G., *Scuola d' Ingegneria di Bologna*, Bologna, Italia.
Sartori sig.a A.
SAUGRAIN dott. G., Paris, Francia.
SAUTÉ prof. G., *Università Harvard*, Cambridge, U. S. A.
SAVITCH prof. S., *Università di Leningrado*, Leningrad, U. S. S. R.
SBRANA prof. F., *Università di Genova*, Genova, Italia.
SCHAAKE prof. G., *Università di Amsterdam*, Amsterdam, Olanda.
SCHOENBAUM prof. E., *Università di Praga*, Praha, Cecoslovacchia.
Schoenbaum sig.a B.
SCHOENBERG dott. I., Jasi, Romania.
SCHOUTEN prof. J. A., *Politecnico di Delft*, Delft, Olanda.
Schouten sig. M.
SCHUBARTH dott. E., Basel, Svizzera.
SCORZA prof. G., *Università di Napoli*, Napoli, Italia.
SCUTIZZI dott. P., Roma, Italia.
SEGRE dott. B., *Università di Roma*, Roma, Italia.
SEIFERT prof. L., *Università di Masaryk*, Brno, Cecoslovacchia.
SELZER prof. S., Buenos Aires, Argentina.
SEN prof. B. M., *Collegio della Presidenza*, Calcutta, India.
Sen sig.a M.
Sen sig.a S.
SERAZZI dott.a I. L., Torino, Italia.

SERGESCU prof. P., *Università di Cluj*, Cluj, Romania.
Sergesco sig.[a] M. K.
SERRA prof. A., Bologna, Italia.
SEVERI prof. F., *Università di Roma*, Roma.
SFAMENI prof. F., *Università di Bologna*, Bologna, Italia.
SFORZA prof. conte W. C., Bologna, Italia.
SIBIRANI prof. F., *Università di Trieste*, Trieste, Italia.
SICILIANO dott. A., *Scuola Magistrale*, Lecce, Italia.
SIERPIŃSKI prof. W., *Università di Varsavia*, Warszawa, Polonia.
SIGNORINI prof. A., *Università di Napoli*, Napoli, Italia.
SILLA prof. L., *Scuola d'Ingegneria di Roma*, Roma, Italia.
Silla sig.[a] L.
Silla sig. G.
SILVANI avv. C., Bologna, Italia.
SILVERMANN prof. L. L., *Dartmouth College*, Hannover, U. S. A.
Silvermann sig. R.
SINTSOF prof. D., *Istituto di Istruzione di Karków*, Karków, U. S. S. R.
SISAM prof. C. H., *Collegio del Colorado*, Colorado, U. S. A.
Sisam sig.[a] C. H.
Sisam sig.[na] C. S.
SITTA prof. P., Senatore, *Università di Ferrara*, Ferrara, Italia.
SITTIGNANI dott.[a] G. M., Genova, Italia.
SLUTSKY prof. E., *Politecnico di Mosca*, Moskva, U. S. S. R.
SMAKULA dott. A., Göttingen, Germania.
SMITH prof. J. J., Schenectady, U. S. A.
SMITH prof. O. A., Birkerod, Danimarca.
Smith sig.[a] T.
SMOUROFF prof. A., *Istituto Elettrotecnico di Leningrado*, Leningrad, U. S. S. R.
SNYDER prof. V., *Università di Cornell*, New York, U. S. A.
SNYDER sig.[a] M., New York, U. S. A.
SOLDATI dott.[a] S., Bologna, Italia.
SOLE sig.[na] M., Pizzi, Italia.
SOLUSTRI dott. A., Roma, Italia.
Solustri sig.[a] M.
SOMIGLIANA prof. C., *Università di Torino*, Torino, Italia.
SPAMPINATO prof. M., *Università di Catania*, Catania, Italia.
SPANI ing. F. D., *Ferrovie dello Stato*, Bologna, Italia.
SPECCHIA dott. O., *Università di Bologna*, Bologna, Italia.
Specchia sig.[a] dott.[a] L.
SPEISER prof. A., *Università di Zurigo*, Zürich, Svizzera.
Speiser sig.[a] E.

SPITZER dott. L., *Riunione Adriatica di Sicurtà*, Trieste, Italia.
Spitzer sig.ª G.
STABILINI ing. L., *Scuola d'Ingegneria di Bologna*, Bologna, Italia.
Stabilini sig.ª M.
Stabilini sig.ⁿᵃ E.
STACHÓ dott. T., *Politecnico di Budapest*, Budapest, Ungheria.
Stachó sig.ª G.
STAEHCLIN dott. H., Grisons, Svizzera.
Staehclin sig. E.
STANZANI prof.ª R., *Liceo di Ferrara*, Ferrara, Italia.
STEENWYK DE VOS dott. J. E.. Meppel, Olanda.
STEFANI dott. A., Bologna, Italia.
STEGGALL prof. J. E. A., *Università di St. Andrews*, Dundee, Scozia.
STEINHAUS prof. H., *Università di Leopoli*, Lwów, Polonia.
Steinhaus sig.ª S.
STENTA prof. M., *Università di Padova*, Trieste, Italia.
STEPHANSEN prof. E., *Politecnico Norvegese*, Bergen, Norvegia.
Stephansen. sig.ⁿᵃ G.
STERN prof. A. W., Brooklyn, U. S. A.
Stern sig.ª B.
STERNBERG prof. W., *Università di Breslau*, Breslau, Germania.
STOÏLOW prof. S., *Università di Cernauti*, Cernauti, Romania.
STOUFFER prof. E. B., *Università di Kansas*, Kansas, U. S. A.
STOZEK prof. W., *Scuola Politecnica di Leopoli*, Lwów, Polonia.
Stozek sig.ª W.
STRANEO prof. P., *Università di Genova*, Genova, Italia.
STURANI ing. E., Milano, Italia.
SUDAN dott. G. N., Göttingen, Germania.
SUETUNA prof. Z., *Università di Tokyo*, Tokyo, Giappone.
SUPINO ing. dott. G., *Scuola d'Ingegneria di Bologna*, Bologna, Italia.
SUPINO prof. I. B., *Università di Bologna*, Bologna, Italia.
SUPPINI ing. A., Bologna, Italia.
SUSCHKEWITSCH prof. A., *Università di Voronež*, Voronež, U. S. S. R.
SUZUKI prof. S., *Università di Sendai*, Sendai, Giappone.
SWAMINATHAW prof. T. S., London, Inghilterra.
SWIRLES prof.ª B., *Collegio Girton*, Cambridge, Inghilterra.
SZÁSZ prof. O., *Università di Frankfurt*, Frankfurt, Germania.
SZEGÖ prof. G., *Università di Konigsberg*, Konigsberg, Germania.
Szegö sig.ª dott.ª A.
SZÜCS prof. A., *Scuola Politecnica di Budapest*, Budapest, Ungheria.

TABAKOFF prof. D. St., *Università di Sofia*, Sofija, Bulgaria.
TAMBS LYCHE prof. R., *Scuola Politecnica di Norvegia*, Trondhjem, Norvegia.
    Tambs Lyche sig.a E.
TANARI march. G., Senatore, Bologna, Italia.
TARDINI dott. L. L., Modena, Italia.
TARINI ing. A., *Scuola d'Ingegneria di Bologna*, Bologna, Italia.
TARSKI prof. A., *Università di Varsavia*, Warszawa, Polonia.
TAUCER sig. R., *Assicurazioni Generali*, Trieste, Italia.
TAYLOR prof.a M., Cambridge, Inghilterra.
TERNOUTH prof.a E. J., *Università di Reading*, Sussex, Inghilterra.
TERRACINI prof. A., *Università di Torino*, Torino, Italia.
    Terracini sig.a G.
TERRADAS prof. E., *Istituto degli Studi Catalani*, Barcelona, Spagna.
    Terradas sig.a E.
TESORONE prof. R., *Liceo Galvani*, Bologna, Italia.
TESTA sig.na A., Cagliari, Italia.
THIRD prof. J. A., Glasgow, Inghilterra.
    Third sig.a E.
    Ramage sig.na M.
THOMPSON D'ARCY prof. W., *Università di St. Andrews,* St. Andrews, Inghilterra.
THOMSEN dott. G., *Università di Hamburg*, Hamburg, Germania.
TIERCY prof. G., *Università di Ginevra*, Gèneve, Svizzera.
    Tiercy sig.a M.
TIETZE prof. H., *Università di Monaco*, München, Germania.
TIMOSHENKO prof. S., *Università di Michigan*, Ann Arbor, U. S. A.
TIMPANARO dott. S., Parma, Italia.
TOGLIATTI prof. E. G., *Università di Genova*, Genova, Italia.
TOJA ing. G., Roma, Italia.
TOKUJIRO prof. S., *Politecnico di Tokyo*, Tokyo, Giappone.
TONELLI prof. L., *Università di Bologna*, Bologna, Italia.
    Tonelli dott.a sig.a M.
    Rondelli sig.a M.
TONOLO prof. A., *Università di Ferrara*, Ferrara, Italia.
TORROJA Y MIRET prof. A., *Università di Barcelona*, Barcelona, Spagna.
TREVES ing. S., *Scuola d'Ingegneria di Torino*, Torino, Italia.
TRICOMI prof. F., *Università di Torino*, Torino, Italia.
TRIPIER ing. H., Paris, Francia.
TSCHAKALOFF prof. L., *Università di Sofia*, Sofija, Bulgaria.
TURCHI comm. avv. U., Bologna, Italia.
TÜRKISCHER dott. K., Berlin, Germania.

TURNBULL prof. H. W., *Università di St. Andrews*, St. Andrews, Inghilterra.
Turnbull sig.ª E. D.
TYLER prof. H. W., *Istituto di Tecnologia*, Cambridge, U. S. A.
Tyler sig.ª A.
ULLRICH dott. E., *Università di Jena*, Jena, Germania.
URBAN dott. F. M., Brno, Cecoslovacchia.
USAI prof. G., *Istituto Superiore di Scienze Economiche*, Catania, Italia.
VACCA prof. G., *Università di Roma*, Roma, Italia.
VACCHELLI Gen. prof. G., *Istituto Geografico Militare*, Firenze, Italia.
VAIDYANATHASWAMY prof. R., *Università di Madras*, Madras, India.
VAKSELJ dott. A., Ljubljana, Jugoslavia.
VALIRON prof. G., *Università di Strasbourg*, Strasbourg, Francia.
VALLAURI prof. G., *Politecnico di Torino*, Torino, Italia.
VANDERLINDEN prof. H. L., *Università di Gand*, Gand, Belgio.
Vanderlinden sig.ª I. A.
VAN DER WAERDEN dott. B. L., Göttingen, Germania.
VAN DER WOUDE dott. W., *Università di Leiden*, Leiden, Olanda.
Van der Woude sig.ª W.
VANNI prof. G., *Istituto Militare di Radiotelegrafia ed Elettrotecnica*, Roma, Italia.
VANNINI ing. T., Verona, Italia.
VARELA GIL ing. J., *Università di Buenos Aires*, Buenos Aires, Argentina.
VARIĆAK prof. V., *Università di Zagabria*, Zagreb, Jugoslavia.
VASILESCO prof. F., *Università di Bucarest*, Bucuresti, Romania.
Vasilesco prof. C.
Vasilesco sig.ª A.
VASSILIEFF prof. A., *Università di Leningrado*, Moskva, U. S. S. R.
VEBLEN prof. O., *Università di Princeton*, Princeton, U. S. A.
Veblen sig.ª O.
VERCELLI prof. F., *Istituto Geografico di Trieste*, Trieste, Italia.
VETTER prof. Q., *Università Carolingia*, Praha, Cecoslovacchia.
VIJAYARAGHAVAN prof. T., *Nuovo Collegio*, Oxford, Inghilterra.
VIOLA prof. G., *Università di Bologna*, Bologna, Italia.
VIOLA ing. T., Bologna, Italia.
VITALI prof. G., *Università di Padova*, Padova, Italia.
Vitali sig.ⁿᵃ L.
Vitali sig.ⁿᵃ M.
Scandola sig.ⁿᵃ L.
VITALI prof. G., *Liceo Galvani*, Bologna, Italia.
VITI prof. R., *Liceo Scientifico di Bologna*, Bologna, Italia.

VIVANTI prof. G., *Università di Milano*, Milano, Italia.
VOIGT dott. H., Göttingen, Germania.
VOLK dott. O., *Università di Kaunas*, Kaunas, Lituania.
Kuenburg. dott.[a] M.
VOLTERRA prof. V., Senatore, *Università di Roma*, Roma, Italia.
VRANCEANU prof. G., *Università di Jasi*, Jasi, Romania.
Vranceanu sig.[a] J.
WALTER prof. A., *Scuola diplomatica di Darmstadt*, Darmstadt, Germania.
WALTER sig.[a] G., Darmstadt, Germania.
WASSILION prof. P., Athenai, Grecia.
WATAGHIN dott. G., Torino, Italia.
WATSON prof. G. N., *Università di Birmingham*, Birmingham, Inghilterra.
WATTENDORF prof. F. L., Aachen, Germania.
Wattendorf sig. G. S.
WAVRE prof. R., *Università di Ginevra*, Genève, Svizzera.
WEILL prof. E., *Liceo San Luigi*, Paris, Francia.
WEINSTEIN prof. A., *Politecnico di Zurigo*, Zürich, Germania.
Weinstein sig.[a] M.
WELLS prof. V. H., *Collegio Williams*, Williamstown, U. S. A.
WEYL prof. H., *Scuola Politecnica*, Zürich, Svizzera.
Weyl sig.[a] H.
WHITE prof. F. P., *Collegio St. John*, Cambridge, Inghilterra.
WHITTAKER prof. E. T., *Università di Edinburgo*, Edinburgh, Inghilterra.
Whittaker sig.[a] B. M.
WHITTAKER prof. J. M., *Università di Edinburgo*, Edinburgh, Inghilterra.
WICKSELL prof. S. D., *Università di Lund*, Lund, Svezia.
Wicksell sig.[a] I.
WIELEITNER dott. H., München, Germania.
WILLIAMS prof. D. R., Claremont, Calif. U. S. A.
WILLIAMS prof. V. L. G., *Università Le Gill*, Montreal, Canadà.
Williams sig.[a] W. L. G.
Williams sig.[na] H.
Williams sig.[na] C.
WILSON prof. B. M., *Università di Liverpool*, Liverpool, Inghilterra.
WINTER prof. M., *Società Matematica di Francia*, Paris, Francia.
Winter sig.[a] L.
Winter sig. J.
Winter sig. J.
WIRTINGER prof. W., *Università di Vienna*, Wien, Austria.
WITMER prof. E. E., Lancaster, Penna, U. S. A.
WOLFF prof. C. E., Cheshire, Inghilterra.

WOLFF prof. J., *Università di Utrecht*, Utrecht, Olanda.
 Wolff sig.ª L. G.
WOOD prof.ª R. G., *Collegio Smih*, Northampton, U. S. A.
WRINCH NICHOLSON prof.ª D., *Universita di Oxford*, Oxford, Inghilterra.
YOSIDA prof. Y., *Università Imperiale di Tokyo*, Tokyo, Giappone.
YOUNG prof. J. W., *Collegio Dartmouth*, Hannover, U. S. A.
YOUNG prof. W. H., *Collonge*, La Conversion, Svizzera.
 Young sig.ª Dott.ª G. C.
 Young sig.ⁿª R. C.
 Young sig. P. C.
ZAPELLONI dott.ª M. T., Roma, Italia.
ZARISCHI prof. O., *Università John Hopkins*, Baltimore (Ma.), U. S. A.
 Zarischi sig.ª J. C.
ZENI dott. ing. E., Bologna, Italia.
ZERMELO prof. E., *Università di Friburgo*, Freiburg, Germania.
ZERVOS prof.ª M., Athenai, Grecia.
ZERVOS prof. P., *Università di Atene*, Athenai, Grecia.
 Zervos sig.ª P.
ZIE UDDIN prof. A., *Università di Aligarh*, Aligarh, India.
ZUCCHINI ing. comm. D., Bologna, Italia.
ZUPANCIC prof. R., *Università di Lubiana*, Ljubliana, Jugoslavia.
 Zupancic sig.ª M.
ZYGMUND prof. A., *Università di Varsavia*, Warszawa, Polonia.
 Zygmund sig.ª I.
ZYLINSKI prof. E., *Università di Leopoli*, Lwów, Polonia.

## DISTRIBUZIONE DEI CONGRESSISTI PER NAZIONI

| | Effettivi | Persone di Famiglia | Totale |
|---|---|---|---|
| Argentina | 7 | — | 7 |
| Austria | 9 | 1 | 10 |
| Belgio | 10 | 4 | 14 |
| Brasile | 2 | — | 2 |
| Bulgaria | 5 | — | 5 |
| Canadà | 4 | 3 | 7 |
| Cecoslovacchia | 15 | 7 | 22 |
| Danimarca | 9 | 5 | 14 |
| Egitto | 2 | — | 2 |
| Finlandia | 2 | — | 2 |
| Francia | 56 | 35 | 91 |
| Germania | 76 | 30 | 106 |
| Giappone | 11 | 2 | 13 |
| Grecia | 8 | 2 | 10 |
| Guatemala | 1 | 2 | 3 |
| India | 5 | 2 | 7 |
| Inghilterra | 47 | 17 | 64 |
| Irlanda | 2 | — | 2 |
| Italia | 336 | 76 | 412 |
| Jugoslavia | 4 | 1 | 5 |
| Lettonia | 1 | — | 1 |
| Lituania | 1 | 1 | 2 |
| Norvegia | 8 | 4 | 12 |
| Olanda | 9 | 6 | 15 |
| Palestina | 6 | — | 6 |
| Polonia | 31 | 10 | 41 |
| Romania | 11 | 8 | 19 |
| Russia | 27 | 3 | 30 |
| Serbia | 1 | — | 1 |
| Spagna | 11 | 1 | 12 |
| Stati Uniti d'America | 52 | 24 | 76 |
| Svezia | 4 | 3 | 7 |
| Svizzera | 29 | 19 | 48 |
| Turchia | 2 | 2 | 4 |
| Ucraina | 10 | 3 | 13 |
| Ungheria | 22 | 9 | 31 |
| | 836 | 280 | 1116 |

# PROGRAMMA E SVOLGIMENTO

## PROGRAMMA

**Domenica 2 settembre:** ore 21,30 - Incontro amichevole dei Congressisti coi Soci dell' Unione Matematica Italiana, nelle sale del Circolo di Coltura, gentilmente concesse (via Mazzini, 45).

**Lunedì 3 settembre:**

ore 10 - Solenne seduta inaugurale nell'Aula Magna dell'Archiginnasio.

ore 15 - Prima seduta - R. Università - Nomina del Presidente e dei Vicepresidenti.

ore 16 - Conferenze: D. HILBERT - *Probleme der Grundlegung der Mathematik.* — J. HADAMARD - *Le développement et le rôle scientifique du Calcul fonctionnel.* — U. PUPPINI - *Le bonifiche in Italia.*

**Martedì 4 settembre:**

ore 9 - Conferenze: E. BOREL - *Le calcul des probabilités et les sciences exactes* (1). — O. VEBLEN - *Differential Invariants and Geometry.* — G. CASTELNUOVO - *La Geometria algebrica e la Scuola Italiana.*

ore 16 - Adunata delle Sezioni.

**Mercoledì 5 settembre:**

ore 9 - Conferenze: W. H. YOUNG - *The mathematical method and its limitations.* — V. VOLTERRA - *La teoria dei funzionali applicata ai fenomeni ereditari.* — H. WEYL - *Darstellung kontinuirlichen Gruppen.*

ore 16 - Adunata delle Sezioni.

ore 21,30 - Ricevimento offerto dal Podestà.

**Giovedì 6 settembre:**

ore 9 - Conferenze: V. KÀRMÀN - *Mathematische Probleme der modernen Aerodynamik.* — L. TONELLI - *Contributo italiano alla Teoria delle*

---

(1) Il prof. BOREL, impossibilitato ad intervenire, inviò il manoscritto della conferenza che fu letta dal prof. E. CARTAN.

*funzioni di variabili reali.* — L. AMOROSO - *Le equazioni differenziali della dinamica economica.*

ore 16 - Adunata delle Sezioni.

ore 21 - Concerto orchestrale storico di musica italiana.

**Venerdì 7 settembre**: Visite a Ravenna - a Ferrara - al Lago di Ledro.

**Sabato 8 settembre**:

ore 9 - Conferenze: M. FRÉCHET - *L'analyse générale et les espaces abstraits.* — R. MARCOLONGO - *Leonardo da Vinci nella storia della matematica e della meccanica.* — N. LUSIN - *Sur les voies de la théorie des ensembles.*

ore 12 - Colazione al Littoriale, offerta dal Comitato Ordinatore del Congresso.

ore 16 - Adunata delle Sezioni.

ore 22 - Ricevimento offerto dal Governo Nazionale.

**Domenica 9 settembre**:

ore 9 - Conferenze: F. ENRIQUES - *Continuità e discontinuità nella Geometria algebrica* (1).

ore 16 - Visita a monumenti della città - Scoprimento di una lapide nella casa paterna di Scipione Dal Ferro, e di una lapide nella chiesa ove fu priore Bonaventura Cavalieri.

**Lunedì 10 settembre**:

ore 6,25 - Partenza per Firenze.

ore 11 - Seduta di chiusura del Congresso nel Palazzo Vecchio a Firenze.

Conferenza: G. BIRKHOFF - *Quelques éléments mathématiques de l'art.*

## SVOLGIMENTO

**Domenica 2 settembre.**

Alle ore 21, nei locali del Circolo di Coltura, gentilmente concesso, i Congressisti già arrivati a Bologna furono festosamente accolti dai soci della Unione Matematica Italiana. Le reciproche presentazioni furono semplici e cordiali; la riunione continuò animatissima fin oltre la mezzanotte.

**Lunedì 3 settembre.**

Il lunedì 3 settembre 1928, alle ore 10, nella Aula Magna dell'antico Archiginnasio, alla presenza di S. A. R. il DUCA DI BERGAMO in rappresentanza di

(1) Questa conferenza non ebbe luogo, per l'assenza dall'Italia del prof. ENRIQUES.

S. M. il Re d'Italia; di S. E. l'on. BELLUZZO, Ministro della Pubblica Istruzione, in rappresentanza del Capo del Governo; di S. E. il Prefetto della Provincia di Bologna; di S. E. il Cardinale NASALLI ROCCA, Arcivescovo di Bologna, e di tutte le autorità locali, fu solennemente inaugurato il Congresso Internazionale dei matematici.

Il Podestà di Bologna, on. L. ARPINATI, porge agli intervenuti il saluto augurale in nome della città di Bologna.

Riassunto del discorso del Podestà:

*Altezza Reale, Eminenza, Signori.*

È con viva commozione che a nome della città che ho l'onore di rappresentare, porgo a Voi il saluto augurale. Bologna vi è grata di averla scelta come sede di questo vostro grande convegno; vi è grata per l'atto di riconoscimento alla secolare gloriosa tradizione universitaria. Bologna fascista è orgogliosa di ospitarvi e di potersi mostrare a Voi quale è divenuta sotto l'impulso vivificatore del Fascismo.

In questo vostro breve soggiorno in Italia spero potrete vedere e rendervi esatto conto del nostro stato e del nostro spirito; ed io mi auguro che Voi, finiti i lavori del Congresso, ritornando in patria, possiate serbare un grato ricordo di Bologna e dell'Italia.

Dopo il saluto augurale del Podestà, il Senatore prof. G. ALBINI, Rettore magnifico della R. Università di Bologna e Presidente del Comitato Ordinatore legge la seguente orazione in lingua latina.

JOSEPHI ALBINI, Rector Athenaei bononiensis. Verba in Archigymnasio habita III Non. Sept. A. MCMXXVIII quo die primum sedit Mathematicorum ab omni gente conventus.

Vobis omnibus, Viri clarissimi, qui convenistis pervetus haec Disciplinarum et Artium Universitas non modo laeta lubens obviam occurrit sed magnas etiam agit gratias, quod invitanti sibi tot et tales estis obsecuti. Per vos enim fit ut undique fere coisse videantur eximii qui Mathematicen excolunt vel ipsam vel in aptis haustisve ex ipsa artibus et facultatibus, atque hic unanimi, iis intermissis quibus generatim moveri possint studiis, id unum spectent quob habent universi doctrinae et veritatis propositum. Tanta igitur inest et consiliis vestris et huic concilio auctoritatis atque humanitatis laus, ut iure meritoque favere et interesse censuerint et Civitas magistratu suo cum signis avitae libertatis ac fascibus receptis et Is qui fortiter feliciter praeest rebus patriis summum legans Disciplinae publicae Ministrum et ipsa Sabaudica Domus, regium nomen, omen Italicum, adstante hac lectissimi Principis iuventa pro Rege optimo eodemque doctissimo.

Equidem dignam urben quo conveniretur Bononiam puto, quippe quae perpetua saeculorum serie quasi fato suo benigno, tum *felix prole virum*, tum fautrix hospesque florere perrexerit optimarum artium easque colentium. Cuius Athenaeum, ut illa olim arx Atheniensium, usque vivacem monstrare amat Palladis frondem, qua vix ulla queat pulchrior vel frontes hominum vel vias vitamque populorum honestare.

Anni sunt XL cum ad octava Saecularia post Studium conditum celebranda huc undique spectatissimi meritis et ingeniis viri prope innumerabiles confluxere, laeti urbem visere quae medium per aevum suas inter sescentas turres quasi Pharus praelucens alacri totius Europae iuventuti meta fuit. Ipsa autem urbs visentes doctores amplexa, sicut olim undeunde advenientes discipulos amplectebatur, unumquemque eorum sancta signa doctrinae verique sequentium ore cuiusdam sui poetae in limine salutavit his verbis: *Non es advena, civis hic.* Sane illius memorabilis conventus instar habet hic vester, tanta frequentia, tanta scientia: unumquemque vestrum urbs, ut illos, alloquitur; eaedemque recinunt voces, eadem vota, utinam certiore et candidiore auspicio, renovantur.

Nunc vero, magis etiam quam ut fastos laudesque pristinae vetustatis repetamus, illud praestat ut quanti fuerit momenti ne obliviscamur in rei mathematicae processu, inde a renatis litteris, certe a XV saeculo, Bononiensium doctorum vis atque sollertia. Non meum est id apud vos commemorare: possum quidem memoria repetere perinsignis Scipionis a Ferro aliorumque usque ad Archimediae sagacitatis virum Bonaventuram Cavalerium praeclarissima nomina; quid et quantum suo quisque ingenio effecerint invenerint auxerint, vestra existimatio est. Quamquam fas est omnibus reputare quam scite, quae Astrologiae nomine iam nihil aliud saepe exstiterat nisi oculorum et mentium praestigiae, laqueos et fallacias captionum eluctata, suam sibi praestantiam vindicarit et lucentis mundi sincera speculatrix novam sit adepta inventis clarissimis gloriam. Quid si mathematicorum varias etiam laudes velimus animadvertere, quibus tam saepe praeter doctrinam suam ornari solent, ad multiplices acrioresque humani ingenii habitus nati factique? vel si eos spectemus non diversos quodammodo et secretos sed in comitatu et corona omnis generis disciplinarum cumque earum cultoribus coniunctos? Hoc praesertim anno qui trecentesimus numeratur a natali illius prope divino ingenio viri Marcelli Malpighi quique nos commonefacere videtur quantum vis illa ingeniorum posset, quam late, ut saepe in summis, pateret, quam penitus in universa rerum natura perspiceret. Neque contigit raro ut musici cantus pictaeque tabulae, omnes amoenitates artium iuxta doctorum labores florerent vel ab iis ipsis orerentur: quod si medicus fuit idem philosophus, astronomus quandoque plenus caeli versabatur non ignobilis in terris poeta.

Sed a proposito declinans non concedam voluptati et memoriae, cum praesertim, ubi tam multi adestis et externi et nostrates doctissimi, forsitan illud quoque saepius usurpatum *Bononia docet* intermitti debeat parumper neque

absurdum sit *Bononia discat* dicere. Hoc excepi honestissime dictum ex ore clarissimi viri qui quasi Nestor disertus et doctus ornat emeritus, ut diu iuvit doctor, hunc mathematicorum ordinem antiquis laudibus et usque novis viribus vigentem. Neque mirum; nam quo quisque est doctior, eo novit planius quantum supersit discendum: optimus quisque magister non desinit esse velle in omni vita multa ex parte discipulus, praeque immenso anquirendae doctrinae tamquam pelago ille quoque gubernator *maria omnia vectus* haeret, ceu rudis nauta, prospectans.

Ob id ipsum quod meliorum maior est verecundia, ne etiam dicam sibi consciam ingenuorum virtutem non nimis laudantium verbis oblectari, e cunctis quos praesentes videmus nominabimus neminem. Et videmur praeclarissimos diu lateque spectatos cumque eis iuvenes suam quemque provinciam summa iam praestantia tuentes. Iique omnes tot suorum laborum specimina tantamque huc in medium congerunt messem, ut spem non mediocrem nec sine aliqua superbia sumamus fore ut huius Bononiensis Conventus in fastis doctrinae vestrae nequeat umquam opera et memoria interire.

Quorundam autem nomina eaque magnorum necesse est, utinam ne esset, memorare, ipsorum laudis ergo nostrique maeroris: hic, inquam, desiderantur morte praerepti, e Suetia Mittag Leffler, huius Universitatis honoris causa doctor, et Ivar Fredholm, e nostris Aloisius Bianchi.

Sed finem faciam dicendi. Quamquam mihi nunc vellem paullisper illorum auctoritatem sapientium qui huius Almae Studiorum Matris hereditatem comparарunt, vocem vellem disertorum qui maxime per saecula floruere doctorum, quo haec fluxa verba satius dignitati adaequarem solidae istius disciplinae quam augetis codidie quaeque vos auget, votaque pro laboribus vestris proque eius incrementis elatius nuncuparem. Nemo enim est, quamvis exsors et profanus absit ab ista aede istisque adytis Minervae, dummodo ne ab omni se doctrina ipsaque a vita segregarit, quin sciat Mathematicen primos fontes imasque radices omnium fere prodigiorum quae nostra videt aetas, quibusque in publico et privato incredibiliter fruimur, unam esse complexam. Per eam industrios invicta sollertia homines aspicimus mirabilia molientes, per eam *pennae sunt homini datae*, per eam pars altera orbis cum altera colloquimur; a vastitate oceani, ab infinitate aetheris triumphantium vel quiritantium voces excipimus. Eadem, non secus ac quaerenti de totius mundi ratione et ordine, in acerrimis succurrit quas nuper admirati sumus de atomi compositione inquisitionibus: dignis quidem novo Lucretiano carmine, unde liquido pateret veritatem vitae plus reapse effecisse quam quod umquam aestus mentis et poetarum spiritus finxerint, cum tamen poesis inexplebilis immortalis praeter omnes volet effectas res et usque sublimior corusco e sidere adrideat. Ista quoque ars quam sit et ipsa grandioris non expers poesis, ineptos tantum fugiat, numerorum studiosa et rerum innumerabilium effectrix, socians et compensans vividiores

animi motus cum gravissimis exactae rationis argumentis, levibus eadem alis nisa, eadem abaco et circino incumbens. Equidem exemplo eam esse posse arbitror omni et institutioni et disciplinae qua informatam iuventutem totamque imbutam rempublicam exoptem, potissimum patriae, simul omnium gentium et nationum germano humanitatis sensu consociatarum. Ea est enim perfecta et consummata institutio quae vel egregia facinora aggredi suadeat et nil non audere ad nutum sibi constantis probitatis et cum laude vitae morumque integra et illibata.

Si alza poi il prof. PINCHERLE, Presidente della Commissione Esecutiva, che dà notizia della linea di condotta tenuta nella preparazione del Congresso.

Discorso del prof. S. PINCHERLE, Presidente della Commissione Esecutiva del Congresso:

*Altesse Royale, Excellences, Mesdames, Messieurs,*

Un salut éloquent vient d'être adressé, dans la langue immortelle de Rome, aux nombreux savants de tous pays qui se trouvent réunis dans cette enceinte. Ce salut a été prononcé par le Recteur de l'Université de Bologne: et c'est là un fait qui dépasse une simple expression de courtoisie, car dans l'intention de ceux qui ont préparé cette réunion solennelle, ce fait doit représenter la fin d'un état de malaise, état qui fut une conséquence de la guerre et qui s'est perpétué jusqu'ici.

Les Congrès internationaux des mathématiciens, inaugurés à Zurich en 1897 et qui, olympiades de la pensée, se sont succedés depuis par période de quatre années, ont été interrompus par la guerre. Après la guerre, l'Union mathématique internationale a voulu en renouveler la série; mais cette Union, influencée par un état d'esprit que la psychologie du lendemain de la guerre suffit à expliquer, sinon à justifier, excluait de la partecipation aux Congrès certaines nations dont les contributions aux progrès de la Science ne pouvaient être méconnues. Deux Congrès ont eu lieu avec ces restrictions, l'un à Strasbourg en 1920, l'autre à Toronto, en 1924. Mais dans la séance de clôture de ce dernier, une motion des représentants des États Unis d'Amérique, appuyée par les délégués de plusieurs autres nations, y compris l'Italie, exprimait le vœu que l'ère des exclusions fût close.

Le Conseil de l'Union, peu après, désignait Bologne comme siège d'un futur Congrès pour l'an 1928; choix inspiré par la renom de la vieille ville italienne dont la fameuse Université compte bientôt neuf siècles d'existence.

Il a semblé que ce choix pouvait suggérer un moyen efficace pour réaliser ce qui formait le vœu de la majorité des savants: le retour à une entente dans le domaine de nos études, qui ne fût plus troublée par des souvenirs douloureux et qui delivrât la science du rappel d'un état d'esprit que rien ne justifiait plus.

Si l'invitation au Congrès est faite par l'Université de Bologne, et si la réunion se place sont les auspices d'un Athénée qui a accueilli pendant des siècles les étudiants de toute l'Europe; si cette invitation est adressée à tous ceux

qui cultivent la plus pure de toutes les sciences ; si on ne demande aux invités ni à quelle nationalité ni à quelle école ils appartiennent, mais seulement s'ils tiennent au progrès de la science et aux bienfaits qu'elle apporte, qui pourra refuser son adhésion, qui voudra, pour des événements que le courant de l'histoire éloigne de nous chaque jour davantage, perpétuer des démêlés là où l'on ne cherche que le consentement de la raison ? Telle a été notre pensée, et celle de la grande majorité des savants italiens ; en ce sens a été rédigée l'invitation du Recteur de l'Université de Bologne, et le nombre et la qualité des adhérents que nous sommes heureux de voir réunis dans cette salle historique nous montre que notre façon d'agir, si elle a pu déroger à quelque réglement nécessairement caduc, a obtenu un consentement que nous pouvons, non sans orgueil, qualifier d'universel, et que quelques voix discordantes, venant des côtés les plus opposés, ne font que rendre plus sensible.

L'Homme exceptionnel que la fortune de l'Italie a fait surgir pour qu'il en dirige les destinées a approuvé notre ligne de conduite ; le Congrès a eu Son appui, comme celui du représentant du gouvernement et du premier magistrat de la ville ; grâce à cet appui, la Commission exécutive de Congrès a pu remplir sa tâche, qui était loin de se présenter comme facile.

*Altesse Royale, Excellences, Mesdames, Messieurs,*

Ce Congrès, auquel Sa Majesté le Roi d'Italie a non seulement accordé Son haut patronage, mais où il a voulu être représenté par un prince auguste de Sa Maison, S. A. le Duc de Bergame ; dont le Chef du Gouvernement a accepté la Présidence d'honneur et auquel il a délégué S. E. l'hon. Belluzzo, ministre de l'Instruction publique, qui est en même temps un éminent professeur d'une des branches les plus importantes des mathématiques appliquées ; ce Congrès, disons-nous, va commencer ses travaux. Travaux qui vont être considérables, car ils comprennent dix-sept conférences, d'un caractère général, tenues par des savants d'une haute renommée et se rapportant à des chapitres du plus grand intérêt dans divers domaines des mathématiques pures et appliquées ; plus de 400 communications sur les sujets les plus variés de l'Arithmétique, de l'Analyse, de la Géométrie, des diverses branches de la Mécanique et de la Science de l'ingénieur, de la Statistique, de l'Actuaire et du Calcul des probabilités, de la Didactique ; et tandis que ces communications donneront lieu à de bien intéressantes discussions, la section historique mettra en lumière la contribution que l'Italie, et l'Athénée bolonais en particulier, ont donné à la science depuis le XV^e^ siècle.

Nous osons affirmer que le souvenir de cette réunion sera une pierre miliaire dans l'histoire du développement des rapports scientifiques ; nous osons croire qu'elle ouvre une série nouvelle de Congrès, où les anciennes mésintelligences seront oubliées, et où les savants de tous les pays marqueront périodiquement les progrès obtenus dans ce domaine idéal qui embrasse les plus hautes et les plus

délicates associations de la pensée, et qui trace à la technique les directions à suivre pour contribuer, par les voies les plus rationelles, au bien-être de l'humanité.

Il prof. BIRKHOFF, che parla di poi a nome dei Congressisti stranieri, pronuncia prima nella lingua inglese, poi nella traduzione francese un discorso che qui riportiamo in sunto:

*Altezza Reale, Signori,*

Vi rivolgo da parte dei matematici qui presenti e rappresentanti circa quaranta nazioni di tutte le parti del mondo, il saluto per la vostra calorosa accoglienza.

Noi apprezziamo, più che non possiamo esprimere con parole, le accoglienze che ci ha riservato il Governo italiano, la città antica e famosissima di Bologna e la vostra Università così giustamente celebre.

Era ben naturale che questo Congresso Internazionale si svolgesse in Bologna e noi ci sentiamo onorati di essere fra voi qui, dove ci ha richiamati la nostra ammirazione per l'opera splendida dei matematici italiani. Il ricordo dell'amicizia e della ospitalità usata da voi in passato a nostro riguardo., è un incentivo ed uno stimolo per noi.

Si preannunzia pertanto una settimana memorabile di lavori, e noi vi rivolgiamo i nostri vivissimi ringraziamenti.

Prende per ultimo la parola S. E. BELLUZZO, Ministro della P. I., rappresentante del Governo Nazionale.

Discorso pronunciato da S. E. G. BELLUZZO, Ministro della Pubblica Istruzione:

*Altezza Reale, Signori,*

Sono lieto di portare agli illustri matematici qui convenuti a Congresso da ogni parte del mondo il saluto augurale del Governo Fascista.

Penso che non a caso Bologna sia stata prescelta a sede di questo convegno internazionale: le tradizioni matematiche dell'Ateneo Bolognese e la luce di sapere che da esso si è sparsa nel mondo sono ben degne di accogliere una così eletta schiera di scienziati.

La presenza a questa cerimonia di un Principe della gloriosa Casa attorno alla quale si stringono con il cuore e la mente tutti gli italiani ne accresce la solennità e l'importanza.

Personalmente sono onorato di rappresentare quì il Governo che alla scienza intende dare il posto più degno, sia come Ministro della Pubblica Istruzione, che come Ingegnere e Professore che della scienza matematica molto si è giovato negli studi, nell'insegnamento e nelle costruzioni meccaniche.

Io sono infatti e da tempo un caldo fautore della necessità degli studi matematici per gli ingegneri che della ingegneria intendono fare una scienza e penso talvolta, non senza malinconia, alle somme ingenti che si sarebbero risparmiate

nelle costruzioni, che formano le nuove meraviglie della terra nei diversi campi della tecnica, se il calcolo infinitesimale fosse stato dai progettisti più intimamente conosciuto e severamente adoperato.

La tecnica ha infatti nella matematica un' arma di grande efficacia, che le permette di risolvere i problemi più complessi e difficili e di trovare sempre delle soluzioni di massimo rendimento o di minimo peso ed ingombro, ossia di minima spesa.

Non c' è ramo della tecnica, dalla meccanica all' elettrotecnica, dall' idraulica all' edilizia, che alla scienza matematica non debba il proprio progresso: sono infatti gli studi matematici che hanno permesso di assoggettare a leggi e regole fisse le grandi trasmissioni della energia, di spingere le tensioni delle correnti elettriche alternate, trasmesse per fili sospesi o per fili imprigionati in cavi, a dei valori di migliaia di Volta; è grazie ai risultati degli studi matematici sulle velocità critiche degli alberi, sulle vibrazioni delle masse ruotanti che si possono oggi far girare delle macchine potenti alla velocità di migliaia di giri al minuto primo; è perchè la matematica ha permesso di determinare le leggi del moto perturbato dell' acqua nelle tubazioni in pressione che si possono utilizzare dei salti d' acqua di centinaia di metri; è perchè essa ha insegnato a calcolare gli archi e le volte e le travate che le grandi strutture in ferro, in pietra, in cemento armato sono state rese economiche e sicure.

La matematica è l' arma formidabile che penetra nelle zone più in ombra del sapere e le illumina; è arma potente che con la fisica e la chimica si sforza di demolire la parete dietro la quale sta il mistero della creazione, conquistando lentamente e con tenacia nuove posizioni, aprendo nuovi vasti orizzonti alle indagini sperimentali.

La matematica è la collaboratrice intima della fisica: dove questa con l' esperienza scopre nuove leggi, mette in luce nuovi fenomeni, la matematica con le sue formule consolida la posizione conquistata e la estende.

Il grande MAXWELL ha dimostrato quale istrumento possa essere la matematica nella mente di un genio, giacchè egli con le sue formule è arrivato dove solo più tardi è giunta la fisica. È la matematica che ha indicato agli astronomi l' esistenza e la posizione di un nuovo pianeta nel sistema solare. È la matematica che ha permesso di calcolare le distanze infinitamente grandi dei sistemi planetari — quelle che si esprimono in anni-luce — e le distanze infinitamente piccole dei sistemi atomici che si esprimono in frazioni di milionesimo di millimetro. È la matematica che ha permesso di calcolare la massa di stelle lontane migliaia di anni-luce dalla terra e quella degli elettroni che formano un sistema atomico. È la matematica che, una volta fissata l' ipotesi della dipendenza della massa di un corpo dalla sua velocità e dalla costanza della velocità della luce, ha permesso di creare la teoria della relatività e di arrivare a conclusioni che aprono alla mente attonita degli uomini nuovi insospettati orizzonti.

Su tutte le strade vecchie e nuove, per le quali il progresso si è incamminato, la matematica è sempre stata un propulsore potente ed efficace.

Giacomo Watt ha inventato la macchina a vapore, ma la matematica posta al servizio della termodinamica l'ha perfezionata, indicando le condizioni necessarie per aumentare il suo rendimento e diminuire quindi il consumo di combustibile.

Le trasmissioni telegrafiche attraverso gli oceani sono state permesse dagli studi matematici di Lord Kelvin.

La missione dei matematici nel mondo è certamente fra quelle più illuminate dall'ideale, giacchè se il fisico ed il chimico, scoprendo un nuovo fenomeno o una nuova reazione, possono talvolta volgere la scoperta a proprio profitto, al matematico che riesce a risolvere un problema complesso che ha occupato la sua mente per ore, per giorni, per settimane e talvolta per anni, non rimane che la soddisfazione intima della ricerca compiuta, della soluzione trovata.

Ed è certamente perchè le scoperte matematiche danno solo delle intime soddisfazioni e dei compensi morali che fra i matematici di una stessa Nazione e fra quelli di diverse Nazioni esiste una solidarietà ed uno spirito di collaborazione che non sempre è la regola nei rami della scienza applicata.

Certo può essere doloroso il constatare che mentre le folle prodigano applausi e milioni a degli uomini che hanno l'abilità di scambiarsi dei pugni imbottiti, e si pongono a loro disposizione linee telefoniche e telegrafiche e pagine di giornali, gli uomini di scienza sono ignorati dalle folle e ricordati fugacemente dalla stampa quotidiana quando il ciclo della loro vita fisica ed intellettuale si chiude.

Ma è ben che così sia, perchè la scienza è aristocrazia, la scienza matematica è aristocrazia fra le aristocrazie, che deve operare lontano dalle folle scendendovi in silenzio e in incognito per contribuire a migliorarne o a perfezionarne l'esistenza. Solo la storia distingue coloro che con la mente sono vissuti molto vicini alla terra dagli uomini di scienza che col pensiero sono vissuti vicino a Dio: essa dimentica rapidamente i primi, per ricordare e glorificare solo questi ultimi.

Io non so se verrà un giorno in cui la cultura sarà talmente diffusa nelle classi medie da permettere anche a queste di rendersi conto degli sforzi che hanno affaticato l'intelletto dei matematici, della nobiltà che è stata la guida di questi sforzi, del disinteresse che ne è l'emblema, della grandezza che ne è l'anima.

Augurando prossimo il giorno nel quale la gratitudine dei migliori volgerà un pensiero memore e riconoscente ai grandi matematici che furono ed onorerà come meritano quelli che sono, mi permetto come tecnico e come Ministro, sicuro interprete del pensiero di tutti i tecnici del mondo, di compiere questo atto e di ringraziare voi tutti per il contributo che portate al progresso in generale e a quello della tecnica in modo particolare.

Con questo ringraziamento e con i più fervidi auguri per i risultati dei vostri lavori, nel nome Augusto della Maestà del Re, dichiaro aperto il Congresso Internazionale dei matematici in Bologna.

**Prima seduta plenaria.**

Alle ore 15 dello stesso giorno 3 settembre l'Assemblea generale dei Congressisti è adunata nella massima aula dell'Istituto Chimico per la nomina del Presidente e dei Vice-presidenti del Congresso.

L'aula è accalcata da numerosissimi Congressisti. Prendono posto al banco della presidenza i membri della Commissione Esecutiva. Il Segretario generale, prof. ETTORE BORTOLOTTI, prega i convenuti di voler procedere alla nomina del Presidente del Congresso e dei Vice-presidenti.

Il prof. VIRGIL SNYDER, della Cornell Univ., chiede di parlare e propone che il prof. SALVATORE PINCHERLE sia designato a Presidente del Congresso. La proposta è approvata per acclamazione.

Il prof. PINCHERLE ringrazia l'Assemblea per l'onore concessogli, e propone che la Presidenza venga, insieme a lui, così costituita:

*Vice-presidenti:* prof. DE LA VALLÉE POUSSIN per il Belgio - prof. J. HADAMARD per la Francia - prof. D. HILBERT per la Germania - proff. W. H. YOUNG e J. C. FIELDS per l'Inghilterra ed i Dominions - prof. O. VEBLEN per gli Stati Uniti d'America - prof. H. FEHR per la Svizzera - prof. E. TERRADAS per la Spagna e l'America latina - prof. W. SIERPINSKI per la Polonia - prof. H. BOHR per l'Olanda, la Svezia, la Norvegia, la Danimarca - prof. N. LUSIN per la Russia e l'Ukraina - prof. S. KAKEYA per il Giappone.

*Segretario generale:* prof. ETTORE BORTOLOTTI.

Queste proposte vengono approvate all'unanimità dalla Assemblea.

Il Presidente propone che siano inviati telegrammi di omaggio a S. M. il RE, Alto Patrono del Congresso e a S. E. BENITO MUSSOLINI, Presidente d'onore. La proposta è accolta con plauso dall'Assemblea.

Propone pure l'invio di un telegramma di saluto al prof. ÉMILE PICARD. La proposta è approvata.

Il Presidente dà poi la parola al prof. D. HILBERT per la conferenza: *Probleme der Grundlegung der Mathematik.*

Seguono le conferenze dei professori: J. HADAMARD: *Le développement et le rôle scientifique du Calcul fonctionnel.* — U. PUPPINI: *Le bonifiche in Italia.*

Il Presidente, nel chiudere l'adunanza, propone che a Presidente della prossima seduta sia designato il prof. J. HADAMARD. L'Assemblea approva.

**Martedì 4 settembre.**

Alle ore 9, seduta plenaria.

Presiede il prof. J. HADAMARD. Il Presidente annunzia che il prof. BOREL, il quale dovrebbe leggere la conferenza col titolo: *Le Calcul des probabilités et les sciences exactes*, non è presente a Bologna ed ha inviato il manoscritto, perchè sia letto nella seduta del Congresso. Egli invita perciò il prof. E. CARTAN, presente alla seduta, di dare lettura della conferenza annunziata.

Il prof. E. Cartan ben volontieri accetta l'incarico.

Terminata questa lettura, il Presidente dà la parola al prof. O. Veblen, che legge la conferenza: *Differential Invariants and Geometry.*

In seguito, ha luogo la conferenza del prof. G. Castelnuovo: *La Geometria algebrica e la Scuola italiana.*

Per la seduta plenaria successiva viene designato come Presidente il prof. De la Vallée Poussin.

Alle ore 16 ha luogo la costituzione delle singole Sezioni, la suddivisione in Sottosezioni, ed incominciano le sedute nelle Sezioni e nelle Sottosezioni.

In altra parte si leggeranno i processi verbali di queste sedute.

**Mercoledì 5 settembre.**

Alle ore 9, seduta plenaria.

Presiede il prof. De la Vallée Poussin.

Il Presidente presenta all'Assemblea il prof. W. H. Young, che legge la conferenza: *The mathematical method and its limitations.*

In seguito il prof. V. Volterra legge la conferenza: *La teoria dei funzionali applicata ai fenomeni ereditari*, ed il prof. H. Weyl, la conferenza: *Darstellung kontinuirlichen Gruppen.*

Per la seduta plenaria successiva viene designato come Presidente il prof. W. H. Young.

Alle ore 16 hanno inizio le sedute nelle singole Sezioni, le quali continuano fino a tarda sera.

Alle ore 21,30 i Congressisti partecipano al *Ricevimento offerto in loro onore dal Podestà di Bologna,* on. L. Arpinati, nella residenza comunale. Le belle, ampie sale dell'antico palazzo del comune bolognese sono affollate da Congressisti, dalle loro signore, da autorità e rappresentanze cittadine, che si trattengono in animati conversari fin oltre le 23.

Agli invitati fu servito, con ospitale larghezza, un suntuoso rinfresco.

**Giovedì 6 settembre.**

Alle ore 9, sotto la presidenza del prof. W. H. Young, ha luogo la seduta plenaria.

Leggono le rispettive conferenze: V. Kármán: *Mathematische Probleme der modernen Aerodynamik* - L. Tonelli: *Contributo italiano alla teoria delle funzioni di variabili reali.* - L. Amoroso: *Le equazioni differenziali della dinamica economica.*

Terminata la lettura di queste conferenze, vien designato come Presidente della prossima seduta plenaria il prof. W. Sierpinski.

Alle ore 16 sedute delle singole Sezioni.

Alle ore 21, nel Teatro Comunale di Bologna, ha avuto luogo il concerto orchestrale di musica italiana, diretto dal Maestro Guarnieri, offerto dal Comi-

tato Ordinatore ai Congressisti. Il programma comprendeva scelti pezzi musicali di celebri autori dei secoli passati e contemporanei, in modo da far risaltare le caratteristiche delle varie epoche e metterne in rilievo i pregi più eminenti. La esecuzione, sotto ogni aspetto perfetta, destò nel numerosissimo pubblico schietto entusiasmo e viva commozione.

**Venerdì 7 settembre.**

Questo giorno è stato dedicato alle gite a Ravenna, a Ferrara, a Riva di Garda ed al Ponale, che si sono effettuate secondo i programmi seguenti:

*Programma della gita a Ravenna.*

Ore 7,— - Partenza da Bologna.
» 7.45 - Arrivo a Imola - Caffè-latte
» 9,30 - Arrivo a Ravenna.
» 9,45 - Ricevimento in Municipio (Vermouth d'onore).
» 10,30 - Visita ai monumenti.
» 12,15 - Partenza da Piazza S. Apollinare Nuovo per la Pineta di Classe.
» 13,15 - Colazione (offerta dal Municipio di Ravenna nella Pineta).
» 15,30 - Partenza per porto Corsini.
» 17,30 - Partenza da Porto Corsini per Ravenna.
» 18,— - Partenza da Ravenna per Bologna.
» 21,05 - Arrivo a Bologna.

*Programma della gita a Ferrara.*

Ore 7,— - Partenza da Bologna.
» 8,20 - Arrivo a Pontelagoscuro - Visita ai lavori della Conca del Canale Boicelli e del nuovo acquedotto.
» 9,30 - Partenza per Ferrara in automobile.
» 9,45 - Visita al Duomo, alla Cattedrale, alla Certosa, ed alla casa dell'Ariosto.
» 11,30 - Ricevimento offerto dal Municipio al Palazzo dei Diamanti.
» 14,— - Riunione in Piazza Castello.
» 14,15 - Visita alla Università ed alla Biblioteca.
» 15,— - Visita a Casa Romei, al Palazzo di Ludovico il Moro, al Museo Schifanoia, ecc.
» 17,30 - Partenza dalla Stazione per Bologna.
» 18,20 - Arrivo a Bologna.

*Programma della gita a Riva del Garda ed al Ponale.*

Ore 5,55 - Partenza da Bologna.
» 8,30 - Verona - Caffè-latte.
» 10,— - Arrivo a Rovereto.
» 10,15 - Partenza da Rovereto per Riva con treno speciale del Consorzio Rovereto-Riva.

Ore 11,30 - Arrivo a Riva.
» 11,45 - Illustrazione generale dell' impianto del Ponale al « Circolo Italia ».
» 12,15 - Colazione in Alberghi di Riva, offerta dal Consorzio Rovereto-Riva.
» 13,30 - Partenza da Riva per il Lago di Ledro e le Opere di presa dell' impianto del Ponale, con automezzi del Consorzio Rovereto-Riva.
» 16,— - Visita alla Centrale idroelettrica di Riva.
» 17,30 - Partenza da Riva per Rovereto con treno speciale.
» 19,30 - Partenza da Rovereto.
» 23,25 - Arrivo a Bologna.

I Congressisti avevano facoltà di partecipare, con libera scelta, ad una di queste gite.

Alla *gita di Ravenna* parteciparono 400 Congressisti.

Le fabbriche di terraglie di Imola, a conto del Comitato Ordinatore, avevano espressamente fabbricata la tazza pel caffè-latte, che fu lasciata, in memoria, ai Congressisti.

A Ravenna numerosi mezzi di autotrasporto attendevano i Congressisti per portarli al municipio ove il Podestà, on. CALVETTI, dà loro il benvenuto a nome della città di Ravenna. Parla poi S. E. l'on. LEICHT, Sottosegretario alla Istruzione pubblica e professore nella R. Università di Bologna, che porge ai Congressisti il saluto a nome del Governo.

« I Congressisti, egli dice, cultori della più nobile fra le scienze, si accosteranno alla città che racchiude tante cospicue memorie, non solo come cultori dell' arte, ma come profondi pensatori. L' immagine di Giustiniano, ancora viva nei mosaici di San Vitale, dovette sembrare in tutto il medio evo quasi simbolo della presente vitalità dell' impero, sopravvissuto alle invasioni barbariche. Innanzi ad essa certamente si soffermava pensoso il divino poeta, al quale i Congressisti fanno un nobile omaggio. Ed è giusto che i cultori della più universale fra le scienze innalzino il loro pensiero a colui che fu non solo grande poeta, ma grandissimo pensatore e che seppe riunire, in sintesi meravigliosa, tutte le conoscenze del suo tempo.

» Davanti all' immagine di Giustiniano, innanzi al sepolcro di Dante, i Congressisti si sentiranno, meglio che ovunque, cittadini dell' Urbe ideale che non ha torri nè porte, inondata da un mare di luce e intorno a cui sta una selva di cime vergini e di picchi scoscesi: la verità duramente contrastata, gli insidiosi veri del poema dantesco ».

Il prof. PINCHERLE, Presidente del Congresso, risponde, a nome dei Congressisti; ringrazia il Podestà di Ravenna per l'accoglienza ospitale, e, con vivo senso di commozione, il Capo del Governo, che volle essere presente a questa manifestazione, ad un tempo lieta e solenne del Congresso, nella persona, a noi cara, di un nostro illustre collega.

Ai Congressisti viene offerto, con signorile larghezza, un vermout d'onore, poi hanno inizio le visite ai monumenti della città. Si forma quindi un lungo corteo di autotrasporti che conducono i gitanti alla pineta di San Vitale, dove in uno spiazzo fra gli alberi secolari sono state imbandite le mense per una sontuosa e lauta colazione offerta dal Podestà di Ravenna.

Il trattamento è perfetto, l'ospitalità cordiale e completa.

Terminato il banchetto, la serie degli autocarri trasporta i Congressisti a Porto-Corsini, dove una breve sosta permette la visione dell'Adriatico sfavillante e solenne nel tramonto sereno.

Alla *gita a Ferrara* parteciparono 78 Congressisti, accompagnati dal prof. comm. U. PUPPINI, professore di idraulica e direttore della scuola di ingegneria di Bologna, che li guidò nella visita degli importanti lavori in corso di esecuzione alla conca del canale Boicelli, che dovrà collegare il Po colla darsena di Ferrara, e del grandioso acquedotto destinato a fornire acqua a tutto il comune di Ferrara, derivandola dal Po, a mezzo di un modernissimo impianto di filtrazione ed epurazione.

Dopo la visita, l'impresa costruttrice e la Società per la navigazione fluviale hanno offerto un sontuoso rinfresco ai Congressisti, i quali poi, per mezzo di numerose automobili, messe a loro disposizione dal comune di Ferrara, si recarono in città e furono accolti nel Castello Estense dal Vice-prefetto e dal Presidente della deputazione provinciale. Si recarono poi in visita dei monumenti cittadini.

Alle 11,30, nel palazzo dei diamanti, il Podestà di Ferrara, comm. RAVENNA, ha rivolto ai Congressisti il saluto di Ferrara, ricordando le glorie del suo Ateneo, che ha avuto il vanto di ospitare l'immortale Copernico.

A nome dei Congressisti ha risposto, ringraziando, il comm. PUPPINI.

Il Podestà di Ferrara ha offerto ai Congressisti un lauto rinfresco.

Alla *gita a Riva di Garda* ed al *Ponale*, che è avvenuta secondo il programma stabilito, parteciparono 73 Congressisti.

Giunti a Riva nella mattinata, furono ricevuti dal comm. DE FRANCESCO, Podestà di Rovereto, e dal senatore CONTI, rappresentante l'Ente Autonomo Adige-Garda, e dopo una sosta per la colazione, essi visitarono la grande Centrale elettrica di Riva: indi, con autovetture, si avviarono verso il lago di Ledro, seguendo la suggestiva strada del Ponale che per lungo tratto domina il sottostante lago di Garda.

Giunta a Ledro, la comitiva prese visione del progetto e dei lavori compiuti allo scopo di sfruttare, versandole nel lago di Garda, le acque del lago di Ledro poste a circa 600 m. sopra il primo, e visitò di poi la Galleria in pressione e i due pozzi delle saracinesche. Terminata la visita e salutato a malincuore il piccolo incantevole Lago, i Congressisti ritornarono a Riva, quindi a Rovereto, e in serata giunsero a Bologna.

**Sabato 8 settembre.**

Alle ore 9, seduta plenaria.

Presiede il prof. W. SIERPINSKI, il quale subito concede la parola al prof. M. FRÉCHET, che legge la conferenza: *L'analyse générale et les espaces abstraits.* Dipoi hanno luogo le conferenze: R. MARCOLONGO, *Leonardo da Vinci nella storia della matematica e della meccanica.* — N. LUSIN, *Sur les voies de la théorie des ensembles.*

Terminati i lavori mattutini del Congresso i Congressisti sono convenuti al Littoriale, ove ha avuto luogo la colazione di 1100 coperti offerta dal Comitato Ordinatore.

Al tavolo d'onore, oltre al Presidente del Congresso prof. PINCHERLE ed al Presidente del Comitato prof. G. ALBINI, Rettore della R. Università, sedevano il Prefetto della provincia S. E. G. GUADAGNINI, il Podestà di Bologna on. ARPINATI, le autorità civili e militari della città e della provincia ed i delegati al Congresso degli Stati esteri.

Allo champagne il prof. S. PINCHERLE pronunciò elevate parole di ringraziamento ai rappresentanti del Governo e del Comune, ed espresse la soddisfazione dei Congressisti tutti per l'ottima riescita del Congresso.

La colazione si è svolta tra la massima animazione, e, nonostante il numero eccezionale degli intervenuti, con ordine perfetto.

Alle ore 16, ultima seduta nelle singole Sezioni e Sottosezioni.

Alle ore 22 i Congressisti sono stati accolti nelle splendide sale del palazzo del Governo da S. E. il Prefetto, gr. uff. G. GUADAGNINI, che ha loro offerto un ricevimento solenne improntato a cordiale signorilità.

Le vastissime sale sono apparse bentosto gremite; e si sono intrecciate animate conversazioni fra le maggiori personalità della politica e della scienza con i professori stranieri e le signore venute in loro compagnia per visitare l'Italia.

Alle ore 23 è stata aperta la sala del buffet; il ricevimento si è protratto fino a tarda ora, ed ha lasciato la migliore impressione nell'animo dei Congressisti, che hanno voluto esprimere a S. E. il Prefetto la loro viva riconoscenza per le accoglienze ricevute, per le agevolazioni che le Autorità politiche e cittadine hanno loro concesso e per la calda, spontanea ospitalità loro offerta dalla cittadinanza, tale da lasciar loro caro e grato ricordo del soggiorno in Bologna.

**Domenica 9 settembre.**

La seduta plenaria indetta per le ore 9 non ha potuto aver luogo per l'assenza del prof. F. ENRIQUES, che avrebbe dovuto leggere la conferenza: *Continuità e discontinuità nella Geometria algebrica.*

## Assemblea della Unione Matematica Internazionale.

Il giorno 9 settembre alle ore 10, in una delle aule dell'Istituto Matematico, si è tenuta l'Assemblea della Unione Matematica Internazionale.

Sono rappresentati i paesi seguenti aderenti all'Unione: Belgio, Canadà, Cecoslovacchia, Danimarca, Francia, Giappone, Gran Bretagna, Italia, Olanda, Polonia, Stati Uniti d'America, Svezia, Svizzera (13 paesi sopra 19).

Sono presenti i membri della presidenza: DE LA VALLÉE POUSSIN e FIELDS, Presidenti d'onore; PINCHERLE, Presidente in carica; YOUNG e FEHR, Vicepresidenti.

Presiede il prof. S. PINCHERLE, Presidente. Funziona da Segretario il prof. H. FEHR.

Nell'atto di aprire la seduta, il Presidente avverte che questa riunione non può avere altro che un carattere ufficioso, poichè il Segretario Generale, per questione di principii, non stimò opportuno convocare l'assemblea dei delegati, nè ha inviato il verbale della adunanza di Toronto.

Espone poi le difficoltà che si sono presentate nella organizzazione del Congresso, al quale si imponeva la necessità che fossero invitati i matematici di tutti i paesi, senza eccezioni di sorta.

Per vincere quelle difficoltà, si pose il Congresso sotto gli auspici della Università di Bologna, e si volle che gli inviti fossero fatti dal Rettore magnifico di quella Università, autorità scientifica universalmente riconosciuta ed aliena da ogni significato politico. In tal modo il Congresso ha potuto riprendere il carattere veramente Internazionale che avevano avuto tutti i Congressi della serie inaugurata a Zurigo nel 1897, e continuata fino all'inizio della grande guerra.

L'assemblea approva, a voti unanimi e con acclamazione, il seguente Ordine del giorno, che sancisce la linea di condotta tenuta dal Presidente nella preparazione del Congresso:

*I membri della Unione Matematica Internazionale, sono riconoscentissimi al prof. Pincherle di ciò che egli ha fatto per il successo del Congresso di Bologna, e l'approvano interamente. Per studiare la situazione attuale si rimettono alla Presidenza della Unione Matematica Internazionale.*

Il prof. PINCHERLE ringrazia l'assemblea per questo voto di fiducia, ritiene tuttavia di non poter conservare l'ufficio di Presidente della Unione Matematica Internazionale, e prega la Presidenza di prendere atto delle sue dimissioni, che sono assolutamente irrevocabili. Dopo di ciò lascia il seggio di Presidenza al Presidente d'onore Signor DE LA VALLÉE POUSSIN.

La seconda parte della seduta è consacrata ad uno scambio di vedute circa la scelta della sede del prossimo Congresso internazionale, come preparazione alla seduta della assemblea generale dei Congressisti che si terrà a Firenze il giorno 10.

Alle ore 16 i Congressisti hanno assistito allo scoprimento di una lapide posta sulla casa paterna di SCIPIONE DAL FERRO e di un'altra lapide posta sulla facciata della chiesa della Mascarella ove fu priore BONAVENTURA CAVALIERI.

Il prof. BORTOLOTTI ha brevemente richiamato i periodi di storia matematica bolognese in cui fiorirono quei due matematici, ed ha spiegato quale significato essi abbiano nello sviluppo delle teorie algebriche e nei prodromi della analisi infinitesimale.

**Lunedì 10 settembre.**

Alle ore 6,25 quei Congressisti che già non erano partiti alla volta di Firenze, presero posto in un treno speciale che li portò a quella città ove giunsero alle ore 9,20.

Alle ore 11 si raccolsero tutti in Palazzo Vecchio, e nella sala dei Cinquecento, col più solenne apparato, ebbe luogo la Assemblea dei Congressisti.

La seduta ebbe inizio con fervide parole di saluto del Podestà di Firenze, sen. GARBASSO, che ha pronunziato il seguente discorso:

*Eccellenze, Signore e Signori,*

Sono lieto e orgoglioso di porgere ai membri del Congresso Internazionale dei Matematici il saluto e l'omaggio del Comune e del popolo di Firenze.

E sono lieto di poter esprimere alla Commissione Esecutiva e al suo illustre Presidente in particolare, prof. Salvatore Pincherle, la nostra viva gratitudine.

È per noi un grande onore che il Congresso chiuda la sua nobile fatica, riunendosi per l'ultima volta in questa vecchia casa del popolo fiorentino. Riconosciamo però, se me lo permettete, senza falsa modestia, che in nessun luogo forse avrebbe potuto svolgersi più degnamente che qui, la conferenza del prof. Birkhoff: Quelques éléments mathématiques de l'art.

Voi sapete, Signore e Signori, che se Firenze e la Toscana furono, a partire dal medioevo, la culla delle arti, esse hanno dato anche un contributo di primissimo ordine alla rinascenza delle matematiche.

Avrò il piacere, fra poco, di mostrarvi le pergamene della nostra nobiltà scientifica.

S. E. il Ministro della Pubblica Istruzione ha voluto infatti autorizzare i benemeriti direttori della Biblioteca Nazionale e della Biblioteca Laurenziana, i proff. Bruschi e Rostagno, ad esporre qui in Palazzo Vecchio i documenti che provano il nostro diritto di primogenitura.

Fu un toscano, Leonardo Fibonacci di Pisa, che al principio del secolo XIII rivelò all'Europa cristiana l'algebra degli indiani e degli arabi. Il suo « Liber abbaci » fu composto nel 1202.

Fu un toscano, Raffaello Canacci, di Firenze, che, nel secolo XIV pubblicò il primo trattato d'algebra che sia stato scritto in lingua moderna.

Fu un toscano, Leonardo da Vinci che alla fine del quattrocento divinò la nuova meccanica.

Fu un toscano, Galileo Galilei, che alla fine del secolo XVI e al principio del XVII, fondò l' astronomia moderna e la meccanica razionale.

Galileo Galilei fu anche il primo che, dopo Archimede, fece ciò che ora chiamiamo una integrazione. Tre discepoli di Galileo: Bonaventura Cavalieri, Evangelista Torricelli e Vincenzo Viviani lavorarono fra i primi a fondare il calcolo infinitesimale. Se la scoperta dei metodi generali ha fatto dimenticare i precursori, i resultati del Cavalieri, del Torricelli e del Viviani sono citati però, quasi ad ogni pagina, nella « Nova methodus fluxionum » di Isacco Newton, e questo basta alla gloria dei nostri italiani.

Quando si è riassunto così, rapidamente, il contributo che Firenze diede allo sviluppo della più perfetta fra le scienze, non si è posta ancora in luce l' influenza che le matematiche hanno esercitato nella formazione del genio elegante, sobrio e limpido del popolo toscano.

Le nostre biblioteche conservano, a decine, dei trattati d' aritmetica, d' algebra e di geometria, composti nel '300 e nel '400 per quei mercanti che erano allora i banchieri dei papi, degli imperatori, dei re di Francia, e dei re d' Inghilterra.

E conservano, le nostre biblioteche, saggi numerosissimi su le matematiche e la meccanica, dovuti ad artisti che si chiamavano Lorenzo Ghiberti, Leon Battista Alberti, Antonio Filarete, Francesco di Giorgio Martini e Leonardo da Vinci.

A Firenze, come nella Grecia antica, le matematiche sono state dunque un elemento principalissimo della civiltà.

Ma a Firenze, come nella Grecia antica, la fioritura maggiore delle arti ha preceduto la fioritura massima delle scienze.

E se negli orti di Academo i sapienti fissavano le verità immortali all'ombra delle statue immortali, sembra fosse necessario che Sandro Botticelli ritrovasse la grazia perfetta e Raffaello Sanzio, qui a Firenze, la perfetta bellezza, perchè Galileo Galilei potesse rivelare da ultimo il pensiero del Dio geometra di Platone.

Ma io mi accorgo, Signore e Signori che vi sto facendo un discorso sugli elementi artistici delle scienze, discorso che non è compreso nel programma compilato dal mio illustre collega, il prof. Pincherle.

Vi chiedo scusa di avere deviato e vi prego di permettermi soltanto di formulare la speranza che voi possiate riportare dalla vostra visita a Firenze il ricordo di una città che non fu soltanto, come dicono le guide, « une ville d'art célèbre », ma anzi, e in tutti i tempi, uno dei fari luminosi della civiltà universale.

Quindi il prof. Birkhoff, dell' Università Harvard, svolgeva la sua conferenza sul tema: *Gli elementi matematici nell' arte.*

L'egregio scienziato americano dimostrava con originali concetti come la

proporzione matematica sia fondamentale nell' arte, che è poi continua ricerca della simmetria geometrica.

« Per comprendere veramente un'opera d'arte — egli dice — bisogna prima » afferrarne l'oggetto, compiendo uno sforzo proporzionale alla sua complessività » per averne una percezione esplicita della simmetria ed armonia più o meno » nascosta ».

In base a questo principio il prof. BIRKHOFF si pone la questione di conoscere fino a qual punto la quantità delle relazioni d'ordine, che intercorrono fra gli elementi d'un oggetto artistico, ha rapporto con la complessità dell' oggetto stesso.

Problema ch'egli sottilmente risolve riaffermando l'importanza del fattore geometrico nella comprensione di un'opera artistica, poichè l'espressione estetica varia al variare delle dimensioni.

Terminata la conferenza, il prof. PINCHERLE, Presidente del Congresso, ringrazia il Podestà a nome dei Congressisti, riferisce poi circa le pratiche preliminari fatte per la designazione della sede del futuro Congresso, e, come risultato di quelle pratiche, mette in votazione la proposta che il prossimo Congresso internazionale abbia luogo in Isvizzera nel 1932.

Dopo una cordiale adesione del Delegato svizzero prof. FUETER, la proposta è approvata con unanime acclamazione.

Il prof. PINCHERLE constata con viva soddisfazione questa manifestazione della Assemblea generale dei Congressisti, e termina auspicando che nuovi legami di cameratismo si vadano stringendo fra gli scienziati, per un sempre crescente sviluppo della scienza e della civiltà.

Chiusa la seduta, i Congressisti si sono recati a visitare la interessantissima mostra di rari libri di scienze matematiche, ordinata nello stesso Palazzo Vecchio dal direttore della Biblioteca Nazionale comm. BRUSCHI, e da quello della Biblioteca Laurenziana comm. ROSTAGNO.

# PROCESSI VERBALI DELLE SEDUTE DELLE SEZIONI

## Martedì 4 settembre 1928.

### SEZIONE I.

La seduta si inizia alle ore 16. Il prof. L. TONELLI rivolge agli intervenuti il saluto augurale. Informa la Sezione che, in vista del gran numero delle Comunicazioni annunciate, la Sezione I è stata suddivisa in quattro Sottosezioni, in modo che in ciascuna di esse fossero trattati argomenti aventi fra di loro la maggiore attinenza.

La Sezione, dietro proposta del prof. TONELLI, nomina per acclamazione a Presidenti ed a Segretari delle Sottosezioni:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Per la Sottosezione | I-A, | Presidente | E. LANDAU, | Segretario | S. CHERUBINO |
| » » | I-B, | » | H. BOHR, | » | G. LAMPARIELLO |
| » » | I-C, | » | G. FUBINI, | » | A. SICILIANO |
| » » | I-D, | » | G. PÓLYA, | » | S. MINETTI. |

Dopo di che ogni Sottosezione si è installata nella propria sede, ed ha iniziato i lavori.

### SEZIONE I-A.

Presidente E. LANDAU.

La seduta è aperta alle ore 16,20. Il Presidente prega i presenti di volersi presentare, affinchè possano vicendevolmente fare personale conoscenza. Vengono poi successivamente svolte le Comunicazioni seguenti:

G. SANSONE. *Nuove formule risolutive delle congruenze cubiche.*

G. KOLOVRAT. *Sulla contrazione ed estensione dei numeri.*

T. NAGELL. *Sur la représentation d'un nombre entier par une forme cubique.*

A proposito di questa Comunicazione il Presidente fa rilevare l'importanza dei risultati ottenuti dal prof. NAGELL, e dal DELAUNAY in un campo in cui nulla di generale era stato ancora fatto.

B. DELAUNAY ha presentato al Congresso una Comunicazione su questo argomento, col titolo: *Über die Darstellung der Zahlen durch binäre kubische Formen von negativer discriminante*; egli era venuto a Bologna per presentare la sua Comunicazione, ma in questo momento è assente.

Il Presidente, prof. E. LANDAU, invita il prof. K. PETR ad assumere la presidenza in vece sua, dovendo egli recarsi ad altra Sezione.

Il prof. K. PETR assume la presidenza. Continua lo svolgimento delle Comunicazioni, nell' ordine seguente:

A CAHEN. *Sviluppo per eccesso di un numero positivo* N *in frazione continua.*

L. J. MORDELL. *Some applications of Fourier series in the analytic theorie of numbers.*

Prima di dare la parola ad altri inscritti, il Presidente prof. PETR propone che per la seduta successiva la presidenza sia data al prof. J. C. FIELDS di Toronto.

È approvato per acclamazione.

Il Segretario CHERUBINO fa presente che nei due giorni seguenti egli ha impegni nella Sezione II, prega perciò il Presidente di volerlo sostituire nell' ufficio di Segretario.

Il Presidente propone che tale ufficio sia affidato al prof. F. CALLAI, che accetta ed è nominato.

Dopodiciò ha luogo la Comunicazione del prof. G. CANDIDO. *Applicazioni delle funzioni* $U_n$ *e* $V_n$ *di Lucas all' analisi indeterminata.*

M. CIPOLLA, uno degli Introduttori della Sezione I, presenta la Comunicazione dei sigg. POLETTI e STURANI: *La serie dei numeri primi appartenenti alle due forme quadratiche* $(2n^2+2n+1)$, $(2n^2-2n-1)$ *entro 250 milioni*, riferendosi al sunto pubblicato e distribuito ai Congressisti.

Nessun altro chiedendo di parlare, il Presidente, alle ore 17,55, dichiara chiusa la seduta.

## SEZIONE I-B.

La seduta si inizia alle ore 16,20, Presidente il prof. H. BOHR, Segretario il dott. G. LAMPARIELLO.

Dietro invito del Presidente si leggono le seguenti Comunicazioni:

H. BOHR. *Bericht über die Theorie der fastperiodischen Functionen.*

A. WALTER. *Fastperiodische Folgen.*

L. L. SILVERMANN. *On Nörlund definition of summability.*

A. ZYGMUND. *Remarques sur les ensembles d'unicité dans quelques systèmes orthogonaux.*

T. VIJAYARAGHAVAN. *A discussion of order of magnitude of*

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n,$$

*under hypotheses such as that the a's are positive*

$$c > 0, \qquad \sum a_n x^n \sim exp.\left(\frac{c}{1-n}\right) \textit{ when } x \to 1-0.$$

Il Segretario, riferendosi ai sunti pubblicati e messi a disposizione dei Congressisti, fa presente alla Sezione le Comunicazioni annunciate dai sigg. G. PRASAD, J. REY PASTOR, A. DURANONA, A. BLAQUIER.

Il Presidente propone che per la prossima seduta la presidenza sia data al prof. F. RIESZ.

La Sezione approva.

## SEZIONE I-C.

La seduta ha inizio alle ore 16,20 sotto la Presidenza del prof. G. FUBINI, ed è continuata, dopo la seconda Comunicazione, sotto la Presidenza del prof. G. VITALI, su proposta del prof. FUBINI, che ha dovuto assentarsi.

Sono state fatte le seguenti Comunicazioni:

L. TONELLI. *Sulla semicontinuità degli integrali doppi.*

L. NIKLIBORC. *Sur quelques problèmes du calcul des variations.*

N. SAKELLARION. *Ueber die Beltrami-Hamiltonsche partielle Differentialgleichung in der Variationsrechnung.*

G. JULIA. *Remarques sur les problèmes de « Meilleure approximation » et sur le problème de Dirichlet.*

A. WEINSTEIN. *Analogien zwischen der Theorie der Flüssigkeitsstrahlen und der Minimalflächen.*

C. POPOVICI. *Nouvelles solutions de l'équation de Volterra.*

J. MOLLERUP. *Die Methode der Iteration im Falle eines beschränkten Kerns.*

Il Presidente fa noto alla Sezione che fu presentata anche una Comunicazione del prof. RASMADZÈ, col titolo *Solutions périodiques du Calcul des variations* di cui il sunto fu pubblicato nel volume distribuito ai Congressisti.

Su proposta del Presidente, il prof. G. JULIA è stato nominato Presidente per la prossima seduta della Sottosezione.

## SEZIONE I-D.

La Sezione inizia i suoi lavori alle ore 16,20. È Presidente il prof. G. POLYA, Segretario S. MINETTI.

Sono state fatte le seguenti Cominicazioni:

G. GIORGI. *Fondamenti per una teoria intrinseca delle funzioni di variabile complessa.*

S. KAKEYA. *On the maximum modulus of an analytic function of two variables.*

F. LEJA. *Sur quelques propriétés frontières des séries entières doubles.*

G. VALIRON. *Sur quelques proprietés des fonctions analytiques dans le voisinage de leurs singularités.*

G. Polya. *Sur la recherche des points singuliers de la série de Taylor.*

J. Mandelbrojt. *Sur les singularités des séries de Dirichlet.*

Y. Karamata. *Théorèmes sur les séries de Taylor à coefficients bornés.*

R. Nevanlinna. *Sur les théorèmes d'unicité dans la théorie des fonctions uniformes.*

S. Minetti. *Sulla teoria delle funzioni intere di genere finito.*

O. Szász. *Ueber Dirichletsche Reihen an der Konvergenzgrenze.*

N. Obrechkoff. *Sur la sommation de la série de Taylor sur le contour du domaine de sommabilité, par les diverses méthodes.*

## SEZIONE II.

Il prof. L. Berzolari, invia un saluto ai Congressisti e fa noto che la Sezione seconda è stata suddivisa in due Sottosezioni che rispettivamente tratteranno prevalentemente *Geometria Algebrica* e *Geometria Differenziale.*

Propone che a Presidenti, per la seduta odierna, siano nominati: V. Snyder, per la Sezione A; ed E. Cartan per la Sezione B, a Segretario della Sezione B: Enea Bortolotti.

Invita ciascuna Sottosezione ad iniziare, nella propria sede, i lavori della giornata.

## SEZIONE II-A.

La seduta si apre alle ore 16,25 sotto la presidenza del prof. V. Snyder

Hanno luogo le seguenti Comunicazioni:

M. Bruckner. *Ueber die Anzahl* $\psi(n)$ *der allgemeinen Vielflache.*

B. Delaunay. *Ueber die regülare Teilung des 4-dimensionalen Raumes.*

C. Juel. *Beispiele von Elementarkurven und Elementarflächen.*

L. Brusotti. *Le curve gobbe algebriche reali come modelli nella topologia proiettiva dell'allacciamento.*

R. Zupancic. *Sur une décomposition des homographies.*

P. Barbarin. *Images euclidiennes des plans non euclidiens.*

A. Sagastume. *Representación gráfica de las funciones pseudocircolares y pseudohyperbólicas.*

L. Laboccetta. *Estensione dei metodi della geometria analitica alla rappresentazione dello spazio fisico.*

A. Rosenblatt. *Varietà algebriche a tre e più dimensioni.*

## SEZIONE II-B.

La seduta si apre alle ore 16,30. Presidente il prof. E Cartan, funziona da Segretario il prof. Enea Bortolotti.

La seduta odierna è destinata a ricerche di indole topologica. Sono presentate e discusse le seguenti Comunicazioni:

P. ALEXANDROFF. *Das dimensionproblem und die ungeloesten Fragen allgemeiner Topologie.*

B. KERÉKJÁRTÓ. *On the general translation-theorem of Brouwer.*

C. KURATOWSKI. *Un système d'axiomes pour la topologie de la surface de la sphère.*

K. MENGER. *Die Grundlagen der allgemeinen Kurventheorie.*

K. MENGER. *Die Hauptergebnisse der allgemeinen Kurventheorie.*

W. BLASCHKE. *Questioni topologiche di geometria differenziale.*

L. LUSTERNIK. *Sur quelque méthodes topologiques dans la géométrie differentielle.*

T. BONNESEN. *Théorème de Brunn-Minkowski sur les corps convexes.*

S. COHN-VOSSEN. *Der Index einer Nabel-punktes im Netze der Krummungslinien.*

F. GONSETH et G. JUVET. *Sur le problème des quatre couleurs.*

K. REIDEMEISTER. *Fundamental gruppe und Ueberlagerung von Mannigfaltigkeiten.*

A Presidente per la prossima seduta di questa Sezione viene eletto per acclamazione il prof. W. BLASCHKE.

La seduta si chiude alle ore 19.

## SEZIONE III.

Il prof. P. BURGATTI saluta i Congressisti a nome del Comitato Ordinatore e degli Introduttori di questa Sezione. Fa noto che la Sezione è stata suddivisa in due Sottosezioni, per dar modo ai Congressisti che prenderanno la parola, di svolgere le loro Comunicazioni con la dovuta ampiezza.

Propone che per la seduta odierna siano eletti a Presidenti i proff. L. LICHTENSTEIN ed A. ROSENBLATT, ed a Segretari i dott. D. GRAFFI e M. MANARINI.

Queste proposte sono approvate, dopo di che le due Sottosezioni, ciascuna nella propria sede, iniziano i lavori della giornata, secondo le indicazioni del Diario pubblicato e messo a disposizione dei Congressisti.

## SEZIONE III-A.

La seduta è aperta alle ore 16,30. Presiede il prof. L. LICHTENSTEIN, funziona da Segretario il dott. D. GRAFFI.

Il Presidente, essendo assente il prof. D. GRAVÈ, dà la parola al prof. LEVI-CIVITA e dopo di lui seguono le Comunicazioni annunciate, nell'ordine seguente:

T. LEVI-CIVITA. *Applicazioni astronomiche degli invarianti adiabatici.*

H. Geppert. *Die adiabatischen Invarianten beliebiger Differentialsysteme.*

L. Lichtenstein. *Ueber einige mathematische Probleme der Himmelmechanik.*

D. Buchanan. *Trojan Oscillating Satellites.*

D. Buchanan. *Second genus orbits.*

D. Buchanan. *The ellipsoidal pendulum.*

K. Popoff. *Sur le problème des trois corps.*

E. de Chaurand. *Modi tipici di calcolo per la forma e il volume degli astri rotanti.*

J. Chazy. *Sur la stabilité à la Poisson dans le problème des trois corps.*

C. Somigliana. *Sul geoide sferico.*

V. Nobile. *Sulla necessità e possibilità di definire in maniera rigorosa i triedri di riferimento per lo studio dei moti stellari.*

## SEZIONE III-B.

La seduta è aperta alle ore 16,20. Presidente prof. A. Rosenblatt, Vicepresidente B. Hostinský, Segretari M. Manarini e B. Finzi.

Apre la seduta il prof. B. Hostinský in assenza del prof. A. Rosenblatt.

Vengono presentate le seguenti Comunicazioni:

N. Gunther. *Sur le mouvement d'un liquide enfermé dans une vase qui se deplace.*

N. Gunther. *Sur le mouvement d'un liquide dans un domaine multiplement connexe.*

B. Hostinský. *Sur la propagation dirigée des ondes.*

M. Picone. *Sul problema della propagazione del calore in un mezzo privo di frontiera, conduttore, omogeneo e isotropo.*

A. Rosenblatt. *Sopra certi moti permanenti dei liquidi viscosi incompressibili.*

B. M. Sen. *Waves in canals and basins.*

R. Wavre. *Sur les figures d'équilibre d'une masse fluide hétérogène.*

A proposito dell'argomento trattato in quest'ultima Comunicazione il prof. R. Marcolongo ricorda i lavori del compianto prof. Pizzetti che a detto argomento si riferiscono.

Vengono presentate anche le seguenti Comunicazioni:

Bromwich T. J. I'A. *An application of soluntions of Cabbe-problems to the numerical evaluation of the problemes of a sphere falling in a viscous liquid.*

Bromwich T. J. I'A. *An extension of Heavisides solution for the electromagnetic field accompagying a charged sphere, suddenly jerked into motion at the speed of light.*

Per la prossima seduta vengono eletti a Presidente il prof. E. Meissner, ed a Vice-presidente il prof. G. Kolossoff.

La seduta è tolta alle ore 18,40.

## SEZIONE IV
## SOTTOSEZIONI RIUNITE

Per designazione del Comitato Ordinatore del Congresso, il prof. C. Gini assume la presidenza della Sezione ed apre i lavori pronunciando il seguente discorso:

**Discorso del prof. C. Gini.**

« A nome dei cultori italiani di statistica e di scienze affini, ho l'onore di dare il benvenuto ai Colleghi stranieri.

Deve essere ragione di vivo compiacimento per tutti il constatare che, malgrado i criteri restrittivi seguiti dagli Introduttori negli inviti, le Comunicazioni annunciate sono state così numerose da consigliare agli organizzatori del Congresso la divisione della Sezione in due Sottosezioni, una dedicata specialmente ai problemi della Statistica Matematica e del Calcolo delle probabilità, e l'altra alle questioni di Economia Matematica e Scienze attuariali.

Se confrontiamo la ricchezza di materiale che oggi ci è offerto con le poche Comunicazioni presentate or sono venti anni al Congresso di Roma, possiamo renderci conto del notevole progresso compiuto. O io m'inganno, o esso è giustificato da un particolare interesse che la nostra Sezione presenta, poichè, non solo in essa, come in ogni altra Sezione di ogni Congresso Internazionale, vengono a contatto, dalle più remote contrade del mondo, scienziati diversi per offrire insieme sull'altare della Scienza al di fuori di ogni divergenza di politica e di razza, i frutti del loro lavoro; ma, nella nostra Sezione, vengono anche a contatto indirizzi scientifici opposti, quale è quello eminentemente deduttivo rappresentato dalle scienze matematiche e quello eminentemente induttivo che trova la sua più completa espressione nella statistica, ma che ha anche tanta parte nell'economia e nell'attuaria.

Questo antagonismo d'indirizzi che, conviene riconoscerlo, ha dato luogo non di rado a reciproche incomprensioni e divergenze, può e deve essere invece, a mio modo di vedere, la ragione di una collaborazione particolarmente fruttifera, se matematici, da una parte, e cultori di scienze sociali, dall'altra, tenendo ben presente il carattere della propria disciplina, ne avvertiranno le limitazioni e riconosceranno l'utilità di una reciproca integrazione.

Statistici, attuari e cultori di economia applicata hanno il compito di estrarre con faticoso lavoro dalla immensa congerie dei fatti, il pane quotidiano necessario alla vita dell'amministrazione e degli uomini di affari. Voi, matematici, avete

il compito di preparare gli strumenti che rendono il loro lavoro più rapido e più redditizio.

È vano discutere se il vostro compito può immedesimarsi col loro, fino al punto di rientrare propriamente nel campo della statistica, dell'attuaria e dell'economia, come sarebbe vano discutere se l'inventore dell'aratro doveva chiamarsi un agricoltore o piuttosto un meccanico. L'essenziale è constatare che l'invenzione dell'aratro e, dopo di esso, l'invenzione e il perfezionamento di tante macchine agrarie, hanno portato alla coltivazione della terra tali progressi da rendere i nomi degli inventori ben degni di essere segnati a lettere d'oro nella storia dell'agricoltura.

Similmente, non v'è nessuno che possa disconoscere che gli strumenti che i matematici hanno offerto agli statistici, agli attuari e agli economisti, dai tempi di LAPLACE fino alle moderne scuole inglese, russa e italiana, permettono a questi di sfruttare, con risultati incomparabilmente superiori, il molteplice materiale che la complessità della vita sociale offre alla loro osservazione.

Le sedute di questi giorni sono appunto una mostra di nuovi strumenti che voi matematici offrite all'esame degli statistici, degli economisti e degli attuari e che questi, vogliatelo tener presente, si apprestano a giudicare, non solo in base al virtuosismo del loro congegno, ma anche alla praticità della loro applicazione. Non sono molti gli strumenti di cui la statistica finora si serve, nè pochi sono i requisiti che essi devono possedere. Se, come frutto di questo convegno, anche un solo nuovo strumento penetrasse nella tecnica statistica o uno strumento vecchio subisse un perfezionamento essenziale, sarebbe questo un risultato di per sè sufficiente per consacrare ai posteri il ricordo di queste sedute.

Con questo augurio, dichiaro aperti i lavori della Sezione ».

Il prof. GINI, approfittando delle circostanze che le due Sottosezioni sono riunite, e che all'adunanza partecipano anche eminenti scienziati di altre Sezioni, comunica di essere stato pregato di presentare al Congresso, a nome del professor B. LAGUNOFF dello *Statistisches Büreau di Kiew*, il quale è assente, la proposta di erezione di un Istituto Internazionale di Matematica applicata. Tale Istituto dovrebbe comprendere distinti reparti: 1) per i metodi generali dell'indagine di Matematiche applicate, 2) per la Fisica matematica, 3) per la Biologia matematica, 4) per la Sociologia matematica, 5) per la Tecnologia matematica; dovrebbe essere dotato: 1) di una Biblioteca, 2) di un Museo storico matematico, 3) di una raccolta di modelli matematici; dovrebbe curare l'edizione di una rivista di matematica applicata, di tabelle matematiche e nomogrammi, di libri dedicati alle matematiche applicate, ecc.; dovrebbe altresì fornire le direttive per la costruzione di modelli e di macchine calcolatrici; ed infine possedere un apposito Ufficio per l'esecuzione meccanica dei calcoli più laboriosi e complicati.

Alla discussione sull'opportunità o meno di accettare la proposta del LAGUNOFF partecipano TOJA, DU PASQUIER, CANTELLI, HOSTINSKÝ, GUMBEL, HADAMARD

ed altri, i quali espongono le loro riserve sulla proposta avanzata. La discussione si chiude con l'affermazione che ciò che vi è di comune nelle applicazioni della matematica, è soltanto la matematica in sè stessa come compagine teorica, e che perciò, non essendovi luogo a creare un Istituto apposito per le applicazioni pratiche di tale disciplina, il progetto LAGUNOFF non può essere accolto.

Il prof. GINI dichiara a nome del Comitato Ordinatore del Congresso, che la Sezione IV deve ora scindersi in due Sottosezioni: A) per la Statistica e per il Calcolo delle probabilità, B) per l'Economia matematica e per la Scienza attuariale; e propone come Presidenti per le successive adunanze, incominciando dalle odierne: per la Sottosezione A i proff. CANTELLI, DU PASQUIER, SLUTSKY, FRÉCHET; per la Sottosezione B i proff. TOJA, RISSER, MOLINA, GUMBEL; e come Segretari permanenti per la A il prof. GALVANI, per la B il dott. MESSINA.

La Sezione approva unanimamente le proposte del prof. GINI; dopo di che i Congressisti interessati ai lavori della Sottosezione IV-B escono per recarsi nell'aula in cui questa avrà sede.

## SEZIONE IV-A.

Il prof. CANTELLI, assumendo la presidenza, pronuncia felici parole di saluto ai presenti.

Vengono quindi presentate e svolte le seguenti Comunicazioni:

L. G. DU PASQUIER. *Sur les nouveaux fondements philosophiques et mathématiques du Calcul des probabilités.*

Su tale Comunicazione prendono la parola: URBAN, CANTELLI, CASTELNUOVO, e ad essi replica il prof. DU PASQUIER.

F. M. URBAN. *Das Mischungsproblem des Daniel Bernoulli.*

C. A. DELL'AGNOLA. *Intorno alle successioni di variabili casuali discontinue tendenti ad una variabile casuale limite.*

Prendono in fine la parola su questo argomento: CANTELLI, SLUTSKY, FRÉCHET, KHINTCHINE, CASTELNUOVO, NEYMAN, CASTELLANI.

J. NEYMAN. *On methods of testing Hypotheses.*

In merito a questa Comunicazione fa alcune osservazioni MOLINA.

M. CASTELLANI. *Sulla rappresentazione in serie delle leggi di frequenza.*

Hanno la parola, per discutere su tale argomento: KHINTCHINE, URBAN e CANTELLI.

La seduta è tolta alle ore 19,30.

## SEZIONE IV-B.

La seduta si inizia alle ore 16,35. Presiede il prof. G. TOJA. Funziona da Segretario il prof. R. TAUCER.

Si svolgono le Comunicazioni seguenti:

R. Risser. *Sur une formule de survie pour l'ensemble de la vie humaine.*

R. Risser. *Sur la possibilité de représentation d'une population par la loi de Makecham.*

J. Gumbel. *Das Zufallsgesetz des Sterbens.*

R. Taucer. *Sulla teoria dei Gruppi.*

A. Fisher. *The principle of Synthetic Induction in the estimate of subjective* a priori *probabilities.*

Parteciparono alla discussione i sigg. O. Goldiher e F. Insolera.

## SEZIONE V.

In assenza del prof. U. Puppini, apre la seduta il prof. E. Bortolotti, Segretario generale, che porge il saluto ai Congressisti e formula un augurio di proficuo lavoro.

È proposto a Presidente della Sezione il prof. T. Kármán, a Segretario l'ing. L. Petrucci. Queste proposte sono approvate.

Si svolgono poscia le Comunicazioni annunciate, nell'ordine seguente:

G. Supino. *Un criterio di scelta tra soluzioni elastiche a risultanti eguali.*

G. B. Biezeno, H. Hencky. *Sur les équations générales de la stabilité élastique.*

W. Hovgaard. *Determination of the Stresses in a Beam by the method of Variation.*

M. Lelli. *Sulla estensione dei teoremi di Helmoltz e di Lagrange al moto dei fluidi viscosi.*

A. Prosciutto. *Sul modo perturbato di un fluido in prossimità di una corona di pale.*

L. Stabilini. *Le « funzioni di linee » ed i sistemi elastici complessi.*

Il Presidente propone che la prossima seduta sia presieduta dal prof. U. Cisotti. Tale proposta è approvata.

## SEZIONE VI.

Il prof. U. Amaldi inaugura la Sezione, portando ai Congressisti il saluto del Comitato.

Comunica che ragioni famigliari hanno impedito al prof. G. Peano di intervenire al Congresso e propone che gli sia fatto pervenire un saluto da parte della Sezione. La proposta è accolta per acclamazione.

Sono quindi eletti a Presidente per la seduta odierna il prof. H. Fehr, ed a Segretario il prof. G. Furlani.

Il sig. J. Lukasiewicz svolge quindi le sue Comunicazioni:

*Systeme mehrwertiger Logic.*

*Zur Geschichte des Aussagenkalkul.*

*Ueber den Aussagenkalkul.*

Sull'argomento prendono la parola A. PADOA e A. FRAENKEL. Quest'ultimo riferisce intorno ad analoghe ricerche fatte in Germania sulla teoria della deduzione.

Parla quindi il prof. A. PADOA sulle *Proposizioni assiomatiche.*

Si svolge, su questa Comunicazione, una discussione cui prendono parte BERNAYS, TARSKI e CASSINA. I primi due fanno rilevare i rapporti fra la trattazione dell'eguaglianza svolta dal prof. PADOA e quella che si trova nelle opere del PEANO, dell'HILBERT e di altri autori. Il prof. PADOA risponde a tutti spiegando la natura esclusivamente logica e assiomatica della sua trattazione in contrapposizione a quella matematica di altri autori e cita in proposito il giudizio del prof. PEANO.

L. CHWISTEK. *Nouvelles recherches sur les fondements de la mathématique.*

Sul sistema logico da lui svolto chiedono chiarimenti BERNAYS e FRAENKEL. Quest'ultimo parla sulla sua applicazione all'analisi del continuo senza ricorso al teorema della reducibilità. L'Autore spiega gli ulteriori svolgimenti che può avere la teoria dei tipi.

H. HARLEN : *Ueber Axiomensysteme als Satzfunktionen.*

Non vengono tenute le altre Comunicazioni preannunziate, di V. VASSILIEFF e di A. TARSKI.

Il Presidente, prof. FEHR, fa la proposta, accolta per acclamazione, che per la prossima riunione funga da Presidente il prof. G. CASTELNUOVO.

## SEZIONE VII.

Il prof. ETTORE BORTOLOTTI, a nome del Comitato Ordinatore, inaugura le sedute della Sezione ed invita i presenti a nominare il Presidente della seduta odierna ed il Segretario.

Viene nominato Presidente il prof. R. C. ARCHIBALD, Segretario P. LANZAVECCHIA.

Vengono svolte le seguenti Comunicazioni:

G. LORIA. *Quo vadimus?*

A. V. STERN. *The role of mathematics in modern physical theory.*

M. PARFENTIEFF. *La philosophie de la nature chez N. J. Lobatscewski.*

P. LANZAVECCHIA. *Limiti dell'attività dello spirito nella ricerca sperimentale.*

T. GREENWOOD. *Geometrical ontologism.*

D. RIABOUCHINSKY. *Valeur et origine d'un nombre.*

Gli argomenti delle Comunicazioni dei sigg. STERN, LANZAVECCHIA, GREENWOOD, hanno dato luogo ad interessanti discussioni cui hanno partecipato, oltre ai disserenti, i sigg. HATZIDAKIS, PARFENTIEFF, GREENWOOD.

## Mercoledì 5 settembre 1928.

### SEZIONE I-A.

Presiede il prof. J. C. FIELDS, funziona da Segretario il prof. F. CALLAI.

La seduta è aperta alle ore 16,10; vengono ordinatamente svolte le Comunicazioni seguenti:

EMMY NOETHER. *Hyperkomplexe Grössen und Darstellungstheorie in arithmetischer Auffassung.*

O. C. HAZLETT. *Integers as matrices.*

O. ORE. *An arithmetic Theory of Galois Fields.*

A. SPEISER. *Probleme der Gruppentheorie.*

J. C. FIELDS. *Representation of the branches of an algebraic function of several variables in the neighbourhood of the singular manifold an algebraic functhion of one variable.*

J. C. FIELDS. *The existence theorem for the branches of the algebraic functions.*

J. C. FIELDS. *Proof of a theorem in the theory of the algebraic functions.*

R. VAIDYANATHASWAMY. *The theory of multiplicative arithmetic functions.*

M. KRAWTCHOUK. *Sur le théorème de Sturm.*

### SEZIONE I-B.

La seduta è aperta alle ore 16 sotto la presidenza del prof. F. RIESZ, Vicepresidente sig.[a] YOUNG.

Hanno luogo le seguenti Comunicazioni:

A. FRAENKEL. *Gelöste und ungelöste Probleme im Umkreis des Auswahlprinzips.*

B. KNASTER. *Sui punti regolari nelle curve di Jordan.*

B. KNASTER. *Decomposizioni continue e semicontinue nell'* Analysis situs.

W. SIERPIŃSKI. *Sur les familles inductives et projectives d'ensembles.*

S. NIKODYM. *Sur une propriété topologique du plan euclidien.*

S. MAZURKIEWICZ. *Sur les ensembles de dimension faible.*

A. TARSKI. *Ueber Aequivalenz der Mengen in Bezug auf eine beliebige Klasse von Abbildungen.*

Alle Comunicazioni dei proff. FRAENKEL e MAZURKIEWICZ seguono interessanti discussioni, cui partecipano i proff. TARSKI, ZERMELO, CHWISTEK, BERNAYS, ALEXANDROFF.

## SEZIONE I-C.

La seduta ha inizio alle ore 16, sotto la presidenza del prof. G. JULIA; vengono svolte le seguenti Comunicazioni:

R. COURANT. *Über partielle Differenzengleichungen.*

H. LEWY. *Analytischer Karakter der Lösungen elliptischen Differentialgleichungen.*

A. HAAR. *Ueber Eindeutigkeit und Analyzität der Lösungen partieller Differentialgleichungen.*

F. TRICOMI. *Sull' equazione* $y \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

P. ZERVOS. *Sur une théorie nouvelle du problème d'intégration des systèmes de Monge.*

G. PFEIFFER. *Quelques remarques sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre à plussieures fonctions inconnues.*

P. HUMBERT. *Sur une équation aux dérivées partielles du troisième ordre.*

C. PAPAIOANNU. *Sull' integrazione di una certa equazione di Monge con quattro variabili.*

B. COLOMBO. *Problemi per le equazioni alle derivate parziali di tipo iperbolico.*

Su proposta del Presidente, il prof. COURANT è stato nominato Presidente per la seduta di domani.

## SEZIONE I-D.

La seduta è aperta alle ore 16 sotto la presidenza del prof. G. VALIRON. Hanno luogo le seguenti Comunicazioni:

J. KAMPÉ DE FÉRIÉT. *Sur l'uniformisation des fonctions hypergéométriques de deux variables.*

P. KOEBE. *Methoden der konformen Abbildung und Uniformisierung.*

D. MENCHOFF. *Sur la représentation conforme des domaines plans.*

M. LAVRENTIEFF. *Sur une méthode géométrique dans la représentation conforme.*

S. PINCHERLE. *Osservazioni sopra una classe d'operazioni lineari.*

O. ONICESCU. *Le méthodes topologiques dans la théorie des fonctions de variable complexe.*

S. STOILOW. *Sur la topologie des fonctions analytiques.*

A. OSTROWSKI. *Anwendungen einer Lindelöfschen Transformation.*

## SEZIONE II-A.

La seduta ha inizio alle ore 16 sotto la presidenza del prof. L. Godeaux.

Viene annunziata la Comunicazione del prof. J. Rey-Pastor: *Geometria algebrica noeuclidiana,* con riferimento al sunto pubblicato nel volume degli « Argomenti ».

Hanno poi luogo le Comunicazioni seguenti:

G. Schaake. *Le Geometrie degli elementi lineari del piano, degli elementi piani dello spazio e degli elementi lineari dello spazio.*

G. Fano. *Trasformazioni di contatto birazionali del piano.*

G. Fubini. *Trasformazioni birazionali del piano.*

A. Emch. *Finite Groups and their geometric representations.*

V. Snyder. *Involutorial space transformations contained multiply in a linear line complex.*

B. Bydžovský. *Remarque sur les groupes finis de transformations de Cremona.*

A. Torroja. *Sobre la correspondencia entre los puntos de un espacio y los grupos de puntos de otros varios.*

C. Sisam. *On ruled three dimensional varieties of order five.*

Il prof. L. Godeaux, in assenza del Segretario, ha lasciato, per la pubblicazione negli atti, le osservazioni seguenti:

« Plusieurs des communications faites cette après-midi à la Section de Géométrie II-A, réunie sous la présidence du prof. Godeaux, ont trait aux transformations de Cremona. Elles ont pour auteurs MM. Fano, Emch, Snyder, Bydžovský. A propos de la communication de M. Fano, M. Severi a indiqué la liaison entre quelques-uns des points rencontrés par l'auteur et des recherches inédites qu'il a faites antérieurement. D'autres communications sur les variétés algébriques furent faites par MM. Schaake, Torroja et Sisam. Une dernière communication sur l'hydrodynamique fut faite par M. Riabouchinsky. La Section a décidé d'envoyer son salut au prof. F. Enriques (de Rome) actuellement à Buenos-Ayres et a élu M. Castelnuovo comme Président pour la séance de jeudi ».

## SEZIONE II-B.

Alle ore 16 il prof. W. Blaschke, che presiede l'odierna seduta, dà inizio ai lavori della Sottosezione, che verteranno sulla geometria delle varietà riemanniane e delle loro generalizzazioni.

Vengono svolte le seguenti Comunicazioni:

L. Berwald. *Parallelübertragung in allgemeinen Räumen.*

E. Cartan. *Sur les espaces clos admettant un groupe transitif clos fini e continu.*

J. A. SCHOUTEN. *Sulle connessioni lineari indotte nelle* $X_n^m$ (*campi di* m-*direzioni*), *nelle* $A_n$ (*varietà a connessione affine*), *e nelle* $V_n$ (*varietà riemanniane*).

E. CARTAN. *Sur la représentation géométrique des systemes matériels non holonomes.*

V. HLAVATY. *Il trasporto per parallelismo lungo un raggio di luce.*

V. HLAVATY. *La théorie générale de la connexion linéaire.*

Il prof. E. CARTAN, accenna rapidamente ad alcune considerazioni che portano, per altra via, a prevedere il risultato stabilito dal prof. HLAVATY in questa seconda Comunicazione.

A. J. MC CONNELL. *The torsion of Riemannian space.*

M. PETROVITCH. *Sur un nombre absolu rattaché aux géodesiques des surfaces.*

O. VOLK. *Ueber Flächen mit geodätischen Dreiecksnetzen.*

Alle ore 18,30 la seduta si chiude, e viene proclamato Presidente per la seduta di domani il prof. E. BOMPIANI.

## SEZIONE III-A.

La seduta è aperta alle ore 16,20.

Presidente G. D. BIRKHOFF, Vicepresidente J. CHAZY, Segretario D. GRAFFI.

Hanno luogo le seguenti Comunicazioni:

G. KOLOSSOFF. *Sur le centre des forces non parallèles.*

F. LAMBERTI. *Moti distinti componenti del moto assoluto di un sistema materiale.*

L. DONATI. *Relazioni generali concernenti le reti di trasmissione e distribuzione della energia elettrica, desunte della legge di reciprocità.*

J. LARMOR. *Historical Note on Hamiltonian Rays and Dynamical Action.*

G. BIRKHOFF. *A new criterion of stability.*

A. BILIMOVITCH. *Sur les équations intrinsèques du mouvement d'un système matériel.*

A. DENIZOT. *Sur le rapport du coefficient de dilatation à la chaleur specifique et au coefficient de compressibilité.*

D. WRINCH. *On a method for constructing Harmonics for Surfaces of revolution.*

G. VRANCEANU. *Parallélisme et courbure dans une variété non holonome.*

Le Comunicazioni dei proff. BIRKHOFF e WRINCH hanno dato luogo ad interessanti discussioni, cui hanno partecipato i proff. HADAMARD e WATAGHIN.

La seduta è tolta alle ore 19.

## SEZIONE III-B.

La seduta è aperta alle ore 16. Presidente M. MEISSNER, Vicepresidente G. KOLOSSOFF, Segretario M. MANARINI.

Hanno luogo le seguenti Comunicazioni:

G. KOLOSSOFF. *Sur une application de la transformation complexe des équations d'élasticité à la recherche des solutions générales de ces equations.*

G. A. MAGGI. *Sulla trasmissione di onde di forma qualunque da un mezzo isotropo in un altro.*

A. C. DIXON. *The theory of a thin isotropic rectangular plate clamped at the edges.*

E. MEISSNER. *Zur elastizitätstheorie dünner Schalen.*

A. MESNAGER. *Élasticitè à deux dimensions.*

F. MURNAGHAN. *On finite deformations and the energy of deformation of a non isotropic medium.*

N. MOUSKHÉLICHVILI. *Sur le troisième problème aux limites de la théorie de l'élasticité.*

P. BURGATTI. *Intorno alle deformazioni di un cilindro elastico per certe sollecitazioni laterali.*

Y. P. DEL PULGAR. *Le fonctions analytiques de tétravecteur en physique mathématique.*

A. ROSENBLATT. *Sopra certi moti permanenti dei liquidi viscosi incompressibili.*

Sul soggetto della Comunicazione del prof. G. KOLOSSOFF prende la parola il prof. P. BURGATTI, il quale osserva che la risoluzione dell'equazione dell'elasticità dei corpi isotropi si può far dipendere da tre funzioni armoniche anzichè da una biarmonica.

## SEZIONE IV-A.

Sotto la presidenza del prof. DU PASQUIER vengono successivamente presentate e svolte le seguenti Comunicazioni:

F. P. CANTELLI. *Sui confini della probabilità.*

Alla fine della Comunicazione prendono la parola sull'argomento: PICONE, CHERUBINO, PÓLYA, e ad essi replica il prof. CANTELLI.

B. HOSTINSKÝ. *Sur les probabilités des effets qui dépendent d'une suite de transformations successives prises au hasard.*

G. PÓLYA. *Ueber eine Eigenschaft des Gausschen Fehlergesetzes.*

Fanno alcune osservazioni in proposito: NEYMAN, FRÉCHET, P. LÉVY.

F. SIBIRANI. *Ricerca della massima probabilità nel problema delle prove ripetute, nel caso di* m *eventi indipendenti di probabilità costante.*

D. ARANY. *Sur la généralisation du problème de la durée du jeu pour trois joueurs.*

DU PASQUIER e URBAN interloquiscono in fine sull'argomento.

E. CAVALLI. *Sulla probabilità degli errori.*

Hanno alcune riserve sull'esposizione del gen. CAVALLI, CANTELLI, NEYMAN, KHINTCHINE, URBAN.

R. KUZMIN. *Sur un problème de Gauss.*

Questa Comunicazione, in assenza dell'Autore, viene svolta dal dott. GUNTHER; e su di essa si apre in fine una discussione alla quale partecipano URBAN e DU PASQUIER.

Esaurita tale discussione, il Presidente pone all'ordine del giorno una proposta del prof. NEYMAN, tendente a far sì che tutte le ricerche relative al Calcolo delle probabilità, che attualmente sono sparse in un grande numero di periodici e di pubblicazioni accademiche, siano per l'avvenire pubblicate soltanto in alcuni periodici, affinchè gli studiosi abbiano la possibilità di seguire tutti i progressi che vanno via via realizzandosi in questo importante campo della scienza.

Il prof. CANTELLI propone che l'esame di tale questione sia rimandato all'indomani, affinchè gli interessati possano nel frattempo scambiarsi le loro idee sull'argomento; e la proposta viene accolta.

La seduta è tolta alle ore 19,30.

## SEZIONE IV-B.

La seduta è aperta alle ore 16,15; presiede il prof. R. RISSER. Hanno successivamente luogo le Comunicazioni seguenti:

A. QUIQUET. *Sur des carrés parfaits viagers.*

R. R. BRODIE. *Variation in rates of mortality as affecting the reserves for sickness benefits.*

O. GOLDZIHER. *Angenaeherte Lösung algebraischer Gleichungen, mit Anwendungen auf die Rentenrechnung.*

K. G. HAGSTROEM. *Problemate collegiorum salutarium.*

W. DOBBERNACK. *Die systematischen und zufälligen Fehler in der Indexzahlenberechnung.*

La Comunicazione di A. QUIQUET è annunziata dal Segretario; quella di R. R. BRODIE è letta dal prof. F. P. CANTELLI, e dà luogo ad interessante discussione cui partecipano: F. DIVISIA, K. GOLDZIHER, J. GUMBEL, F. INSOLERA, O. MORGENSTERN.

Il prof. K. GOLDZIHER desidera che sia posta agli Atti, a proposito di detta Comunicazione, la dichiarazione seguente:

« Dott. KARL GOLDZIHER führt aus, dass die allgemeinen Ansätze nür im Falle der Zwangsversicherung praktisch anwendbar sind. In der Privatversi-

cherung kann die Selbstauswahl (Autoselection) der Versicherten die Korrelation zwischen Mortalität und Morbidität stark beeinflussen. Je grösser dieser Selektionsfactor für ein bestimmte Versicherungsform ist, warst wahrscheinlicher wird es, dass in diesen Kreise die Verbesserung der Morbiditätverhältnisse eine Verschlechterung der tatsächlichen Sterblichkeit im Laufe der Zeit hervorbringt. Referate wie JASTREMSKY und GOLDZIHER am Versicherungskongress in Amsterdam haben in dieser Richtung numerische Erfahrungen auf Grund des ungarischen Materiales verkannt gemacht ».

## SEZIONE V.

La seduta si apre alle ore 16.

Il prof. KÁRMÁN propone che per le Comunicazioni di carattere idrodinamico, che sono in nota per questa seduta, la presidenza sia tenuta dal prof. CISOTTI. È approvato.

Hanno luogo le Comunicazioni seguenti:

P. STRANEO. *La teoria delle dimensioni fisiche nell' idro e aerodinamica.*

B. FINZI. *Sulle singolarità analitiche nella meccanica dei fluidi.*

E. RAIMONDI. *Sull' eccezione Cisotti al teorema di Kutta-Joukowski.*

M. PASCAL. *Costruzioni geometriche per la corrente piana circuito-rotatorio intorno ad una lamina rettilinea.*

E. PISTOLESI. *Nuove vedute sul problema della scia.*

L. SANTE DA RIOS. *Sul paradosso di Dubuat.*

H. LEVY. *The extension of the Kármán Vortex street to three dimensional flow.*

F. CORINI. *L' elica nella trazione ferroviaria.*

La Comunicazione del prof. M. PASCAL, assente, è presentata dal Segretario.

La Comunicazione del prof. F. CORINI ha dato luogo ad una discussione cui hanno partecipato il colonnello ing. RABBENO, il prof. DA RIOS e l'ing. PAVIA.

## SEZIONE VI.

Presiede il prof. CASTELNUOVO.

Il prof. H. FEHR, Segretario generale della Commissione Internazionale dell' insegnamento matematico, dopo aver reso omaggio alla memoria dei membri deceduti, legge la seguente relazione:

*Les travaux de la Commission Internationale de l'enseignement mathématique.*

« 1. Pour la première fois, depuis la Conférence internationale qui a eu lieu à Paris en avril 1914, la Commission internationale de l'enseignement mathé-

matique se trouve en présence d'un Congrès auquel ont pu de nouveau être conviés les savants de tous les pays où se cultivent les sciences mathématiques. Elle est heureuse de pouvoir saisir cette occasion pour rendre publiquement compte de ses travaux et pour attirer une fois de plus l'attention des mathématiciens sur les nombreux documents mis à leur disposition.

L'oeuvre accomplie est considérable si l'on en juge d'après le nombre et l'importance des publications. Elle fournit un tableau complet de l'enseignement des mathématiques pures et appliquées dans les principaux pays.

2. *Origine et but de la Commission.* - On sait que la Commission internationale de l'enseignement mathématique a été créée par le 4me Congrès international des Mathématiciens (Rome, avril 1908) à la suite de la résolution suivante:

« *Le Congrès ayant reconnu l'importance d'un examen comparé des méthodes et des plans d'étude de l'enseignement mathématique dans les Écoles secondaires des différentes nations, confie à MM.* KLEIN, GREENHILL et FEHR *le mandat de constituer une Commission internationale qui étudiera ces quèstions et présentera un rapport d'ensemble au prochain Congrès*».

3. *Constitution de la Commission.* - Le comité de trois membres désignés par le congrès prit le nom de Comité central et se constitua comme suit : F. KLEIN (Goettingue), président; Sir GEORGE GREENHILL (Londres), vice-président; H. FEHR (Genève), secrétaire-général. Plus tard, au lendemain du Congrès de Cambridge, le comité porta à sept le nombre de ses membres et fit appel au concours de M. D. E. SMITH (New York), qui fut désigné comme second vice-président, ed de MM. G. CASTELNUOVO (Rome), E. CZUBER (Vienne) et J. HADAMARD (Paris). Au cours de ces dernières années nous avons eu le regret de perdre trois membres du comité: FELIX KLEIN, notre distingué président, décédé en 1925; EMANUEL CZUBER en 1926, et Sir GEORGE GREENHILL, en 1927. Le comité se trouve ainsi réduit actuellement à quatre membres.

L'invitation de faire partie de la Commission avait été lancée à tous les pays possédant des établissements d'instruction publique. Au moment de la Conférence internationale de Paris (avril 1914), le nombre des pays ayant adhéré à la Commission était de vingt-huit. Nous en donnons la liste ci-après en conservant la situation géographique de l'Europe avant la guerre mondiale.

| | | |
|---|---|---|
| Allemagne | Bulgarie | États-Unis |
| Argentine | Canada | France |
| Australie | Colonies du Cap | Grèce |
| Autriche | Danemark | Hollande |
| Belgique | Égypte | Hongrie |
| Brésil | Espagne | Iles britanniques |

| | | |
|---|---|---|
| Italie | Portugal | Serbie |
| Japon | Roumanie | Suède |
| Mexique | Russie | Suisse |
| Norvège | | |

4. *Dispositions Financières.* - Les gouvernements des pays participants avaient été invités à mettre à la disposition de leur délégation une somme permettant de couvrir les depenses de la délégation et de la sous-commission nationale et de contribuer aussi aux frais généraux. Pour subvenir aux frais d'impression et aux dépenses du secrétariat général (frais de port, distribution des rapports, etc.), il avait été constitué un fonds formé par deux contributions de Frs. suisses 400. Ces contributions ont été payées effectivement par 19 pays pour la première période et par 16 pour la seconde. Les comptes du comité central présentent un déficit de plus de Frs. 500, qui ont dû être avancés par le Secrétaire-général. Contrairement à l'usage établi dans les grandes commissions. le comité n'a pas été en mesure d'allouer une indemnité au Secrétaire-général dont les fonctions ont été particulièrement absorbantes pendant la première décade.

5. *Sous-commissions Nationales.* - Les dfférentes délégations avaient été invitées à s'adjoindre les sous-commissions nationales, comprenant les représentants des divers degrés de l'enseignement mathématique. Ces sous-commissions ont apporté un concours très précieux aux délégués pour la préparation des rapports. C'est à eux que l'on doit en grande partie les nombreuses publications qui ont été entreprises sur l'initiative de la Commission.

6. *Publication des comptes rendus et des rapports des sous-commissions.* - La revue internationale *L'Enseignement Mathématique* a servi d'organe à la commission. Elle a publié les rapports du Comité central, ainsi que les comptes rendus détaillés des réunions plénières; en outre, elle a signalé régulièrement les publications des sous-commissions. Groupées à Genève au siège de la Commission, ces publications ont été distribuées aux délégations par les soins du Secrétaire-général. Près de 200 fascicules ou volumes ont été transmis à chacun des membres de la commission.

7. *Object des travaux de la commission.* - Dans le texte même de la résolution du Congrès de Rome, il n'est question que de l'enseignement mathématique dans les écoles secondaires. Mais, étant donné que le but de ces écoles et la durée de leurs études sont très variables d'un État à un autre, le Comité central a jugé utile de faire porter son travail sur l'ensemble du champ d'instruction mathématique, depuis la première initiation jusqu'à l'enseignement supérieur. En outre, il ne s'est pas borné aux établissements d'instruction générale conduis-

sant à l'Université, mais il a également fait étudier l'inseignement mathématique dans les écoles techniques ou professionnelles.

Le Comité central a donc entrepris une étude d'ensemble de l'enseignement mathématique dans les différents types d'écoles et à ses divers degrés. Il s'agit d'une étude objective destinée à présenter l'état actuel et les tendances modernes de cet enseignement. Comme on l'a dit dans les réunions de Bruxelles et de Milan, la Commission ne cherche nullement à uniformiser l'enseignement mathématique, mais avant tout de mettre en lumiere les tendances modernes. Ces travaux permettront aux professeurs de savoir ce qui se fait dans les nations voisines. La comparaison des documents et l'étude des expériences faites ailleurs contribueront à réaliser de nouveaux progrès.

8. *Publications du Comité central.* - Elles comprennent onze fascicules reunis en deux volumes (au total 561 pages). Dans le premier fascicule, le Comité central présente le plan général des travaux destinés à servir de guide aux délégués et aux membres des sous-commissions nationales. Signalons tout particulièrement les fascicules consacrés aus conférences internationales tenues à Bruxelles, à Milan, à Cambridge et à Paris.

9. *Publications des sous-commissions.* - Dès 1909, les sous-commissions nationales se mirent à l'oeuvre pour faire un exposé aussi complet que possible de l'organisation des études mathématiques et des tendances suivant le plan suggéré par le Comité central. Grâce au concours dévoué de plus de 300 collaborateurs, la commission se trouve en possession d'un ensemble de documents fort précieux. On en trouvera la liste dans l'*Enseignement Mathématique* (Tome XXI, n.ro 5-6). Au nombre de 291, ces rapports sont répartis sur 176 fascicules ou volumes et forment un total de plus de 13000 pages in-8. Il serait désirable que la collection complète des publications figurât dans toutes les grandes bibliothèques accessibles au corps enseignant. Le dépôt central de vente se trouve à la Librairie Georg e Cie, à Genève.

Voici un tableau sommaire connant la répartition de ces publications sur les divers pays.

| | Fasc. ou volumes | Nombre de rapports | Nombre de pages |
|---|---|---|---|
| Comité Central . . . . . . . . | 11 | 19 | 561 |
| Allemagne . . . . . . . . . . . | 53 | 53 | 5571 |
| Rép. Argentine . . . . . . . . | 1 | 1 | 24 |
| Australie. . . . . . . . . . . . | 1 | 6 | 79 |
| Autriche . . . . . . . . . . . . | 13 | 12 | 776 |
| Belgique. . . . . . . . . . . . | 2 | 5 | 366 |
| *Rip.* . . . | 81 | 96 | 7377 |

| | Fasc. ou volumes | Nombre de rapports | Nombre de pages |
|---|---|---|---|
| *Rip.* . . . | 81 | 96 | 7737 |
| Danemark . . . . . . . . . . . | 1 | 10 | 107 |
| Espagne . . . . . . . . . . . . | 3 | 10 | 165 |
| États-Unis . . . . . . . . . . . | 18 | 18 | 1499 |
| France . . . . . . . . . . . . . | 5 | 45 | 674 |
| Hollande . . . . . . . . . . . . | 1 | 13 | 151 |
| Hongrie . . . . . . . . . . . . | 9 | 9 | 294 |
| Iles Britanniques . . . . . . | 32 | 39 | 921 |
| Italie . . . . . . . . . . . . . . | 10 | 11 | 268 |
| Japon . . . . . . . . . . . . . | 2 | 16 | 788 |
| Roumanie . . . . . . . . . . . | 1 | 1 | 16 |
| Russie . . . . . . . . . . . . . | 7 | 11 | 295 |
| Suède . . . . . . . . . . . . . | 8 | 8 | 229 |
| Suisse . . . . . . . . . . . . . | 9 | 13 | 781 |
| | 187 | 300 | 13565 |

Si l'on compare les publications des divers pays, on constate des différences assez notables. Dans les unes, on s'est borné à fournir des renseignements sur les plans d'études avec quelques indications générales sur l'organisation scolaire; dans d'autres, on a rappelé le développement historique et l'on est entré dans le détail de questions d'ordre méthodologique. C'est ainsi que les publications de la sous-commission allemande costituent à la fois un tableau complet de l'enseignement mathématique en Allemagne et, en quelque sorte, une encyclopédie de la méthodologie et de la didactique mathématique dans ce pays.

A côté des rapports se rattachant directement au plan général des travaux, il en est un certain nombre qui présentent un caractère spécial qu'il y a lieu de signaler ici:

Mentionnons tout d'abord les monographies consacrées plus particulièrement à certaines branches mathématiques de l'enseignement élémentaire ou secondaire, ainsi que celles qui traitent des mathématiques dans leurs rapports avec la physique, la mécanique, ou encore avec la philosophie et la psychologie.

Pour compléter ses rapports, la sous-commission allemande s'était proposée d'examiner l'enseignement mathématique dans les principaux pays en prenant comme point de comparaison les plans d'études, les manuels et méthodes en usage dans les établissements allemands. Ces rapports devaient être basés non seulement sur les documents réunis par les sous-commission nationales, mais encore, autant que possible, sur des voyages d'études. C'est ce qui a pu être fait pour le Danemark (rapport de M. Rohrberg) et pour l'Angleterre (rapport de M. Wolff).

De son côté, la sous commission des États-Unis a entrepris une série de rapports destinés à grouper, pour une même catégorie d'établissements, les

renseignements fournis par les différentes sous-commissions nationales. C'est dans cet esprit qu'ont été rédigés les quatre rapports suivants s'étendant sur les pays représentés dans la Commission :

1) Les matières inscrites dans les programmes mathématiques des divers pays pour l'enseignement élémentaire et moyen pour les élèves de 6 à 18 ans, par M. Brown ;

2) Les mathématiques dans l'enseignement commercial et industriel moyen, par M. H. Taylor ;

3) Les mathématiques dans les Écoles normales, primaires ou établissements similaires, par M. I. L. Kandel ;

4) La préparation des professeurs de l'enseignement secondaire, par M. R. C. Archibald.

10. *Publications récentes et rapport sur la préparation.* - Les travaux de la délégation américaine ont été complétés d'une façon très heureuse par un important volume intitulé : *The Reorganisation of Mathematics in Secondary Education*, publié par un comité constitué sous les auspices de la « Mathematical Association of America » (in-8, 652 pages, 1923). C'est le résultat d'une enquête très approfondie sur les réformes à accomplir dans l'enseignement secondaire des États-Unis. D'entente avec le Secrétaire-général de notre commission, le comité américain a bien voulu remettre un exemplaire à chacun des membres de la Commission.

Il n'est guère possible d'énumérer a cette place les publications qui se rattachent plus ou moins directement aux travaux de la Commission. Par contre, nous tenons à signaler une nouvelle série de rapports dûs à l'initiative de la sous-commission américaine et dans lesquels seront exposés, pour les principaux pays, *les progrès accomplis au cours des 10 dernières années.* Ils seront publiés simultanément dans le *Year Book of the Council of Teachers* et dans *L'Enseignement Mathématique.*

Dans sa réunion de Paris, la Commission internationale avait décidé d'entreprendre une étude d'ensemble sur la préparation théorique et pratique des professeurs de mathématiques de l'enseignement secondaire dans les divers pays. Dès le lendemain de cette réunion, le Comité central procéda aux travaux preparatoires, un questionnaire fut établi dans les quatre langues. En raison de l'importance du sujet, il conviendrait d'achever cette étude.

11. *Les conférences internationales.* - Les travaux de la Commission ne se bornent pas à la publication des rapports. Dans ses conférences internationales, au nombre de quatre, et qui furent en réalité de véritables congrès de l'enseignement mathématique, elle mit en discussion un certain nombre de questions d'intérêt général. Fixées d'avance par des questionnaires adressés en temps utiles à toutes les délégations et etudiées préalablement par des sous-commissions,

les sujets furent indroduits par des rapporteurs désignés par le Comité central. Ils donnèrent lieu à des conférences fort remarquables, suivies de discussions d'un grand intérêt, grâce à la présence de savants éminents de tous les pays. On en trouvera le compte rendu détaillé dans les « Publications du Comité central ». Rappelons les principaux objets mis à l'ordre du jour:

*Réunion de Bruxelles* (aout 1910). - Conférence de C. BOURLET sur la pénétration réciproque des mathématiques pures et des mathématiques appliquées dans l'enseignement secondaire.

*Réunion de Milan* (septembre 1911). - La rigueur dans l'enseignement mathématique des écoles moyennes. Rapporteurs: MM. CASTELNUOVO et BIOCHE. - L'enseignement mathématique théorique et pratique destiné aux étudiants en sciences physiques et naturelles. Rapporteur: M. TIMERDING. - Conférence de M. COLOMBO, sur l'enseignement mathématique à l'Ecole des Ingénieurs et de M. ENRIQUES intitulée « Mathématiques et théorie de la connaissance ».

*Réunion de Cambridge* (avril 1912). - La préparation mathématique des physiciens. Rapporteur: M. RUNGE. - L'intuition et l'expérience dans l'enseignement mathématique des écoles moyennes. Rapporteur: M. D. E. SMITH.

C'est à l'occasion du Congrès de Cambridge que le mandat de la commission internationale a été renouvelé jusqu'au Congrès suivant.

*Congrès de Paris* (avril 1914). - Conférence de M. E. BOREL: L'adaptation de l'ensegnement secondaire aux progrés de la science. - Conférence de M. D'OCAGNE: Le rôle des mathématiques dans les Sciences de l'Ingénieur. - Introduction des premières notions du calcul des dérivées et des fonctions primitives dans l'enseignement secondaire. Rapporteur: M. BEKE. - De la place et du rôle des mathématiques dans l'enseignement technique supérieur. Rapporteur: M. P. STAECKEL.

12. Nous avons la satisfaction de constater que la plus grande partie des travaux projetés ont pu être accomplis. Il est vrai que nous avons dû renoncer à l'étude de la préparation théorique et pratique des professeurs de mathématique à laquelle nous attachons la plus grande importance et qui devait en quelque sorte constituer le couronnement de l'oeuvre da la Commission.

Si le Congrès le désire, nous sommes prêts à reprendre cette étude dont le plan général est déjà établi par un questionnaire très détaillé.

Qu'il me soit permis, en terminant, de rendre encore hommage à la mémoire de nos collègues qui nous ont été enlevés par la mort et de réitérer ici, au nom du Comité central, nos remerciements à tous ceux qui ont collaboré avec tant de dévouement et de désintéressement aux travaux de la Commission. Nous tenons à axprimer aussi notre reconnaissance aux gouvernements, autorités

scolaires, institutions et sociétés scientifiques qui ont subventionné ou encouragé la publication de nos travaux ».

Il prof. FEHR, terminata la esposizione della sua relazione, ringrazia i collaboratori a nome del Comitato.

Aperta la discussione, vi partecipano i professori: SAKELLARION, CONTI, HATZIDAKIS, VETTER, PADOA, MARCOLONGO, VOS VAN STEENWYK, DICHSTEIN, SINTSOF, FEHR, CASTELNUOVO.

L'accordo si concreta su queste linee principali: 1) Conviene che la Commissione sia ricostituita, e che in essa siano rappresentate tutte le Nazioni rappresentate al Congresso; 2) che il Comitato esistente sia riconfermato ed esso elegga gli altri membri della Commissione.

Si ritiene inopportuno proporre ora questioni particolari di programma. Alcuni proponenti ritirano perciò i relativi O. d. G.; il prof. G. PADOA presenta il seguente O. d. G.:

« On demande un rapport du Comité central sur les nombre des leçons de mathématiques dans toute école par rapport au nombre des leçons des autres matières; et aussi sur le nombre des leçons assignées aux professeurs de mathématique et des autres matières qu'ils doivent enseigner dans certaines écoles de certains pays ».

Questo O. d. G. viene accettato come raccomandazione.

In seguito alla Comunicazione presentata dal prof. H. FEHR, Segretario generale della Commission Internationale de l'enseignement mathématique, ed alle fatte discussioni, la Sezione VI decide alla unanimità di sottomettere il seguente O. d. G. all'approvazione del Congresso:

« 1) Le Congrès international des mathematiciens adresse ses remerciements aux Gouvernements, aux institutions et aux personnes qui ont accordé leur aide à la Commission Internationale de l'enseignement mathematique, et rend hommage à la mémoire des membres décédés;

2) il décide de proroger les pouvoirs du Comité central composé actuelment de MM. DAV. EUG. SMITH (New York), président; CASTELNUOVO (Roma) et J. HADAMARD (Paris), vice-présidents; H. FEHR (Genève), Secrétaire-général, et qui devra être completé par l'adjonction d'un cinquiéme membre, désigné par cooptation;

3) il prie le Comité central de compléter la Commission de manière que toutes les nations partecipant au Congrès y soient représentées et de s'assurer de la coopération de leur gouvernement ».

Quindi segue la Comunicazione:

J. E. VOS VAN STEENWYK. *Some remark on the téacling of mathématics in secondary schools.*

Interloquisce il prof. PADOA.

Il prof. SAKELLARION ha già esposto la sua Comunicazione *Proiet pour la costitution d'une commission*, partecipando efficacemente alla discussione dell'O. d. G. FEHR.

Il prof. VANNINI, che ha dovuto assentarsi, ha pregato il prof. CONTI di dire a suo nome che fra i compiti della Commissione potrà rientrare pure l'esame della questione che intendeva portare al Congresso: *Per l'unificazione delle nomenclature in matematica elementare.*

Assentatosi il prof. CASTELNUOVO assume la presidenza il prof. SINTSOF.

Si svolgono quindi le Comunicazioni:

R. MARCOLONGO. *Il calcolo vettoriale nell'insegnamento secondario.*

E. ARTOM. *Intorno all'insegnamento dell'aritmetica e dell'algebra.*

Segue, malgrado la tarda ora, una interessante discussione, a cui partecipano oltre ai Congressisti superiormente nominati, anche il prof. ETTORE BORTOLOTTI.

### SEZIONE VII.

Presidente il sig. R. C. ARCHIBALD.

Si svolgono le seguenti Comunicazioni:

U. CASSINA. *Su due quesiti proposti da Cardano a Tartaglia.*

G. LORIA. *Bombelli e Diofanto.*

Il prof. ETTORE BORTOLOTTI dopo avere fatto alcune osservazioni sulla Comunicazione del prof. U. CASSINA, riferendosi a testimonianze di BOMBELLI, e ad alcune osservazioni e risposte relative a questioni poste dal prof. G. LORIA nella sua precedente Comunicazione, svolge la propria Comunicazione sull'argomento: *I libri geometrici dell' Opera d'algebra di Bombelli, dal codice* B. 1569 *della Biblioteca dell'Archiginnasio di Bologna.*

Non si sono presentati il sig. G. PRASAD che aveva annunciato una Comunicazione sull'argomento: *On mathematical research in ancient medieval and in norden India*, ed il sig. W. THOMPSON D'ARCY che avrebbe dovuto svolgere una Comunicazione sull'argomento: *On the side and diagonal number in Greck Aritmetik.*

## Giovedì 6 settembre 1928.

### SEZIONE I-A.

Presidente R. FUETER, Segretario F. CALLAI.

La seduta si apre alle 16,10; il Presidente cede la parola successivamente ai seguenti Congressisti:

O. E. GLENN. *The complex realm modulo* n, *an arbitrary integer.*

Non rispondono all'appello i proff.: V. AMATO e L. ONOFRI.

A. SUSCHKEWITSCH. *Untersuchungen über verallgemeinerte Substitutionen.*

Il prof. MIGNOSI è assente. Un riassunto della Comunicazione è stato presentato alla segreteria.

Sono pure assenti i proff. FORTESCUE e CALABRESE; la dott.sa KÁRMÁN ha comunicato, in nome dei precedenti, lo scopo della Comunicazione ed ha invitato gli interessati nel problema di leggere la copia presentata.

Il dott. L. ONOFRI ha consegnato al Segretario il testo della sua Comunicazione.

Il Presidente cede la parola al prof. KÖTHE.

G. KÖTHE. *Struktur der Ringe, die die Durchschnitsminimalbedingung erfüllen.*

Dopo la Comunicazione, il dott. NEUMANN chiede una spiegazione. Nella discussione prendono parte il Presidente e la proff.sa EMMY NOETHER di Gottinga.

A. KERIM. *Ueber die Traegheitsformen eines Modulsystems.*

Il Presidente fa rilevare l'importanza di questa ricerca.

Il sig. B. MEIDELL non risponde all'appello. Il Presidente dichiara quindi chiusa la seduta e comunica che il Presidente della prossima seduta sarà il prof. M. CIPOLLA.

## SEZIONE I-B.

La seduta si inizia alle ore 16. Presidente N. LUSIN, Vicepresidente S. BANACH. Segretario G. LAMPARIELLO.

Vengono presentate le seguenti Comunicazioni:

A. GRUZEWSKI. *Sur le problème de P. Urysohn.*

T. RADÒ. *Sur l'aire des surfaces continues.*

P. LÉVY. *Fonctions à croissance régulière et itération d'ordre fractionnaire.*

S. BERNSTEIN. *Sur les fonctions régulièrement monotones.*

A. KOVANKO. *Sur les propriétés des fonctions définies sur les ensembles de diamètre infini.*

N. BARY. *Sur la structure analytique d'une fonction continue arbitraire.*

A. M. GRUZEWSKA. *Sur la continuité de la variation.*

S. SAKS. *Sur la condition* (N) *de M. Lusin et l'intégrale de M. Denjoy.*

F. VASILESCO. *Sur les fonctions multiformes de variables réelles.*

V. BERNSTEIN. *Sur une relation entre la croissance d'une fonction analytique en une serie de points et dans un demiplan.*

## SEZIONE I-C.

La seduta ha avuto inizio alle ore 16 sotto la presidenza del prof. R. COURANT.

Sono state fatte le seguenti Comunicazioni:

E. CAVALLI. *Sull'integrazione delle equazioni differenziali della balistica.*

O. PERRON. *Ueber Stabilität und asymptotisches Verhalten der Integrale von gewohnlichen Differential und Differenzengleichungen.*

S. A. JANCZEWSKI. *Les théorèmes d'oscillation des systèmes différentiels linéaires autoadjoints du quatrième ordre.*

O. H. SMITH. *Ueber reciproke Differentialgleichungen und Differenzengleichungen von zweiter Ordnung.*

Alla Comunicazione del prof. CAVALLI il prof. POPOFF ha osservato che egli ha studiato gli integrali della balistica considerando i punti singolari dell' integrale come funzione del tempo e gli integrali come funzione dell' angolo di proiezione nel « Mémorial de l'Artillerie française » 1926-1928.

La seduta ha avuto termine alle ore 18,20.

## SEZIONE I-D.

La seduta si apre alle ore 16. Presidente il prof. P. KOEBE.

Hanno luogo le seguenti Comunicazioni:

N. E. NORLUND. *Sur les équations aux différences finies.*

M. PLANCHEREL. *Sur les valeurs asymptotiques des polynomes d'Hermite.*

M. PLANCHEREL. *Sur le développement d'un couple de fonctions arbitraires en séries de fonctions fondamentales d'un problème aux limites du type hyperbolique.*

K. DUSL. *Quelques remarques sur les polynomes d'Hermite.*

U. BROGGI. *Su di una classe di sviluppi in serie di polinomi di Hermite.*

R. TAMBS LYCHE. *Sur la convergence de la série* $\sum_{r=0}^{\infty} \begin{bmatrix} x \\ r \end{bmatrix} z^r$.

M. AKIMOFF. *Ueber die Bessel'schen Functionen meherer Variabeln.*

## SEZIONE II-A.

La seduta ha inizio alle ore 16 sotto la presidenza del prof. G. CASTELNUOVO.

Questa seduta è specialmente dedicata alla esposizione di rapporti sui recenti progressi dei vari rami della Geometria algebrica, fatta da vari autori, per iniziativa del prof. F. SEVERI.

Si leggono le Comunicazioni seguenti:

A. COMMESSATTI. *Rapporto intorno alla geometria sopra una superficie algebrica.*

C. ROSATI. *Sulle corrispondenze fra curve algebriche.*

G. FANO. *Sulle varietà algebriche a tre dimensioni aventi tutti i generi nulli.*

A. ROSENBLATT. *Sopra le varietà algebriche a tre dimensioni fra i cui caratteri intercedono certe disuguaglianze.*

B. SEGRE. *Sui moduli delle curve algebriche.*

F. SEVERI. *Interpretazione geometrica delle condizioni d'integrabilità pei differenziali totali algebrici di 1ª specie. Integrali semiesatti.*

O. ZARISKI. *Sopra un teorema d'esistenza per le funzioni algebriche di due variabili.*

G. ALBANESE. *La teoria della base e l'*Analysis situs.

R. BALDUS. *Zur Axiomatik der Geometrie.*

## SEZIONE II-B.

Il prof. E. BOMPIANI apre la seduta alle ore 16,15. Dopo aver rivolto alcune parole di ringraziamento a coloro che nei giorni scorsi hanno qui ricordato il compianto prof. L. BIANCHI, dalla cui morte si compiono oggi tre mesi, prega gli intervenuti di volerlo esonerare dal presiedere la seduta d'oggi. Viene acclamato Presidente il prof. J. A. SCHOUTEN.

Le Comunicazioni della giornata sono dedicate alla geometria proiettivo-differenziale e si svolgono nel seguente ordine:

E. BOMPIANI. *Teoria della corrispondenza fra due superficie.*

E. ČECH. *Una generalizzazione della deformazione proiettiva.*

A. TERRACINI. *Un nuovo problema di geometria proiettiva differenziale.*

G. FUBINI. *La trasformazione di Laplace, di Lévy e di Moutard per le ipersuperfici.*

L. GODEAUX. *Sur la théorie des surfaces et l'espace réglé.*

A. KAWAGUCHI. *On the differential geometry of conic-families in the projective space of three dimensions.*

P. MENTRÉ. *Sur les familles de complexes linéaire.*

G. PALOZZI. *Sul piano principale di Halphen e sulla retta e sul punto principale di due curve sghembe.*

G. SANNIA. *Il fascio canonico di una superfice.*

E. B. STOUFFER. *On the projective differential geometry of ruled surfaces.*

La seduta è chiusa alle ore 18,30. Viene chiamato a presiedere la seduta di domani il prof. B. BYDŽOWSKÝ.

## SEZIONE III-A.

La seduta è aperta alle ore 16,20.

Presidente E. T. WHITTAKER, Vicepresidente J. LE ROUX, Segretario D. GRAFFI.

Vengono lette le Comunicazioni seguenti:

F. GONSETH et G. JUVET. *Sur la relativité à cinq dimentions et sur une interprétation de l'equation de Schrödinger.*

J. LE ROUX. *La relativité du langage et la théorie de la Gravitation.*

G. Y. Rainich. *On a space-time possessing the symmetry properties of radiation.*

P. Straneo. *Nuova integrazione delle equazioni della relatività generale e loro interpretazione fisica.*

H. L. Vanderlinden. *Dynamique d'un point matériel dans un champ gravifique.*

V. Varićak. *Zur relativischen Mechanik.*

E. T. Whittaker. *On electrodynamics in a gravitational field.*

G. Wataghin. *Teoria crepuscolare dell'interferenza e della diffrazione.*

P. Y. Chou. *The gravitational Field of a body with rotationale symmetry in Einstein's theorie of Gravitation.*

Le Comunicazioni dei sigg.: Juvet, Rainich, Straneo hanno dato luogo a discussioni, cui partecipano i sigg. Whittaker, Buhl, Juvet, Straneo, Rainich.

La seduta è tolta alle ore 18,30.

## SEZIONE III-B.

La seduta si apre alle ore 16,20.

Presidente il prof. N. Kryloff.

Hanno luogo le Comunicazioni seguenti:

J. Hadamard. *Sur le battage des cartes et ses relations avec la mécanique statistique.*

M. Krawtchouk. *Sur l'intégration approchée des équations differentielles linéaires.*

N. Kryloff. *Sur quelques recherches récentes dans le domaine de la solution approchée des problèmes de la physique mathématique.*

M. Brillouin. *La méthode des moindres carrés en Physique mathématique.*

B. Demtchenko. *Sur une généralisation des invariants intégraux.*

G. Giorgi. *Sul calcolo spaziale più esteso.*

F. Sbrana. *Considerazione sul calcolo degli operatori funzionali che si presentano nella fisica matematica.*

Il prof. T. Levi-Civita presenta una Comunicazione del prof. L. Silla, momentaneamente assente, col titolo *Applicazione dei metodi di Poincaré e Levi-Civita alla risoluzione del problema asteroidico.*

La seduta è levata alle ore 18,30.

## SEZIONE IV-A.

Il prof. Slutsky, che, secondo il deliberato della Sezione IV, nella sua seduta del 4 settembre 1928, dovrebbe assumere la presidenza della Sottosezione, esprime

il desiderio di essere esonerato dall'onorifico incarico. Insistendo egli in tale richiesta, la Sottosezione, benchè a malincuore, prende atto della rinuncia del prof. SLUTSKY, ed unanimemente acclama come Presidente per la giornata il prof. GULDBERG, che accetta, e che pone subito in discussione la proposta avanzata il dì innanzi dal prof. NEYMAN, per quanto concerne la pubblicazione dei lavori del Calcolo delle probabilità.

Il prof. NEYMAN ha la parola per svolgere e illustrare il suo ordine del giorno.

Il prof. CANTELLI ritiene possibile l'istituzione di un Bollettino internazionale dedicato esclusivamente al Calcolo delle probabilità. Il prof. NEYMAN, per rimanere nel campo di una più rapida attuabilità, crede che gli editori di alcuni periodici molto reputati e diffusi, per esempio dei « Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo » o del « Metron » potrebbero specializzarsi nella pubblicazione degli studi concernenti il Calcolo delle probabilità.

Il prof. GUMBEL propone che la questione venga particolarmente esaminata per l'indomani da una Commissione da nominarsi dalla Sottosezione. Questa accetta la proposta GUMBEL, e invita a far parte di detta Commissione NEYMAN, DELL'AGNOLA, MOLINA, GUMBEL, WICKSELL.

Il Presidente, dà la parola al prof. SLUTSKY, il quale riferendosi alla discussione che seguì alla lettura del lavoro del prof. DELL'AGNOLA, nella seduta del 4 Settembre, fa una dichiarazione per rilevare l'importanza e la priorità di alcune ricerche del prof. CANTELLI.

Dopo di ciò vengono presentate e svolte le seguenti Comunicazioni:

A. GULDBERG. *Sur la fonction Gamma.*

R. A. FISHER. *On a property connecting the* $\chi^2$ *measure of discrepancy, with the method of maximum likelihood.*

V. ROMANOVSKY. *Sur la comparaison des moyennes des variables aléatoires dépendantes pour les épreuves indépendantes.*

V. ROMANOVSKY. *Sur le calcul des moments des moyennes des fonctions des variables aléatoires pour les épreuves indépendantes.*

Le Comunicazioni dei proff. FISHER e ROMANOVSKY, che hanno scusato la loro assenza, vengono presentate dal Segretario della Sottosezione; e questa le accoglie per la inserzione negli Atti del Congresso.

E. C. MOLINA. *Application to the binomial summation of a laplacian method for the evaluation of definite integrals.*

Su tale argomento fa alcune osservazioni il prof. NEYMAN.

E. SLUTSKY. *Sur les fonctions éventuelles compactes.*

Alla fine della Comunicazione ha la parola, per alcune osservazioni, il prof. CANTELLI.

U. BROGGI. *Su di un problema di perequazione.*

A Sottosezioni riunite, sotto la presidenza del prof. RISSER, viene infine fatta la seguente Comunicazione:

P. MASSÉ. *Application des fonctions de lignes à l'étude des phénomènes monétaires.*

Interloquiscono in fine sull'argomento i proff. GUMBEL e RISSER.

Il prof. GUMBEL presenta per iscritto la dichiarazione seguente, per le inserzioni negli Atti:

**Diskussion zum Vortrag von Massé.**

E. J. GUMBEL: « Die deutsche Inflation, die grösse aller Zeiten und Länder, gab uns Gelegenheit zu einem gründlichen empirischen Studium der vom Vortragenden theoretisch behandelten Probleme. Der Geldwert, gemessen an einer stabilen Valuta, fiel stärker als eine Exponentialfunktion der Zeit. Die Umlaufsgeschwindigkeit stieg ungeheuer. Zwischen Veränderungen des Geldwertes im obigen Sinn, der Grosshandelsziffern, Kleinhandelsziffern und der Löhne existierten Phasenverschiebungen, die im Lauf der Zeit abnahmen. Die Inflation muss enden wenn diese Phasenverschiebungen null sind, weill dann kein Infla tionsgewinnler mehr existiert ».

La seduta è tolta alle ore 20.

## SEZIONE IV-B.

Presiede il prof. J. GUMBEL.

Per l'assenza di alcuni disserenti la seduta è rimandata a sabato venturo. Il prof. MASSÉ, venuto in ritardo, fa la sua Comunicazione alla Sezione IV-A.

## SEZIONE V.

Per questa seduta la presidenza è assunta dal prof. C. B. BIEZENO.

Si svolgono le seguenti Comunicazioni:

A. LOPERFIDO. *Sulle proprietà essenziali delle carte usate dall'artiglieria per il tiro in direzione.*

S. TIMOSHENKO. *The stiffnes of suspension bridges.*

Su questa Comunicazione chiedono la parola il prof. C. BIEZENO ed il prof. MEISSNER.

G. KOLOSSOFF. *Sur l'application des diagrammes complexes dans la théorie de la resistence des matérieux.*

F. BEY-BOULAD. *Sur le calcul exact et pratique des poutres continues de ponts de forme quelconque.*

G. ABATE-DAGA. *Sull' applicazione del sistema di proiezione Soldner alla formazione delle mappe catastali italiane.*

## SEZIONE VI.

Presidente prof. DICKSTEIN.

Il prof. T. VANNINI che ieri non potè presentare la sua proposta di nominare una commissione per l'unificazione della nomenclatura nella matematica elementare raccomanda oggi la sua proposta alla Commissione Internazionale che, in seguito alle discussioni svoltesi il giorno precedente nella Sezione VI, deve essere costituita. Seguono quindi le Comunicazioni nell'ordine stabilito e senza discussioni:

A. MARONI. *Osservazioni relative ai poliedri.*

C. CLAPIER. *Méthode de recherche didactique en géometrie élémentaire.*

Manca la terza Comunicazione perchè è assente il prof. W. LIETZMANN. Continuano:

P. HEEGAARD. *La représentation des points imaginaires de Sophus Lie et sa valeur didactique.*

M. ZERVOS. *Sur une expression nouvelle de la définition des nombres premiers.*

U. CASSINA. *Theoria de radice quadrato graduale.*

A proposito di questa Comunicazione il Presidente propone d'inviare un telegramma di condoglianze al prof. G. PEANO per la morte del fratello; tutti approvano. La Sezione invita quindi il prof. HATZIDAKIS a presiedere l'adunanza del pomeriggio del giorno sabato 8.

Si aggiungono le seguenti Comunicazioni:

G. FURLANI. *Nuovi indirizzi nell'insegnamento della matematica in Italia.*

HATZIDAKIS. *Due proposte sull'insegnamento medio.*

La seduta è tolta alle ore 18,15.

## SEZIONE VII.

Presidente G. LORIA.

Il prof. LORIA comunica che il prof. W. LIETZMANN di Lipsia ha inviato e messo a disposizione dei Congressisti il suo libro: « Über die Beurteilung der Leistungen in der Schule ».

Si svolgono le seguenti Comunicazioni:

H. HAMID BEY. *Sur l'histoire des mathématiques en Turquie.*

Al termine di detta Comunicazione prende la parola il prof. E. BORTOLOTTI per richiedere alcuni chiarimenti al prof. HAMID BEY.

Q. VETTER. *Rapporto sulle lettere indirizzate al dottor Taddeo Hagecius da Hayck, astronomo, medico e matematico ceko, conservate a Breslavia.*

K. RYCHLIK. *La théorie des fonctions de Bolzano.*

Su questo argomento prende la parola il prof. ZIE UDDIN.

A. Denizot. *Sur un phénomène observé par Guglielmini à Bologne en 1791.*

Su tale argomento prende la parola il prof. E. Bortolotti.

M. G. Sittignani. *Sull'infinito matematico elementare.*

G. A. Plimpton. *The History of elementary Mathematics in the Plimpton Library.*

Al termine della Comunicazione del sig. Plimpton prendono la parola i proff. G. Loria ed E. Bortolotti; ed i presenti alla seduta, interprete il Presidente prof. G. Loria, manifestano al sig. Plimpton la loro ammirazione e riconoscenza per l'opera da esso attuata a vantaggio degli studi matematici.

La prof.sa C. Gualandi traduce in italiano alcuni brani della prefazione del catalogo fatto dal prof. Smith della Biblioteca Plimpton.

Il prof. Albenga, che doveva svolgere una Comunicazione sull'argomento: *La scienza delle costruzioni in Leonardo da Vinci*, non ha potuto intervenire, e di detta Comunicazione viene letto un sunto dal prof. G. Supino.

Zie Uddin Ahmad. *Histoire de l'Astronomie de l'Arabe: particulièrement les récherches de El Biruni.*

Sull'argomento di detta Comunicazione prende la parola il prof. G. Loria.

Non si è presentato il sig. A. Vassilieff che doveva svolgere l'argomento: *Lobacewski et Tchebyceff.*

## Sabato 8 settembre 1928.

### SEZIONE I-A

Presiede provvisoriamente il prof. O. A. Smith in assenza del Presidente designato, prof. R. Fueter, occupato nella seduta speciale dei delegati. Segretari Cherubino e Callai.

Il prof. A. Padoa chiede di parlare per primo perchè ha già scritto sulla lavagna alcune formule utili a rendere più breve il suo dire.

L'assemblea consente ed il prof. Padoa prende il posto del prof. Fueter.

A. Padoa. *Un duplice sistema indeterminato* (l'autore espone la sua Comunicazione parlando in francese).

Domandano alcuni schiarimenti i sigg. Candido e Callai.

L. G. Du Pasquier. *Sur une théorie nouvelle des idéaux de quaternions complexes.*

R. Fueter. *Ueber Funktionen einen Quaternionvariablen.*

Il sig. R. Fueter fa note le ragioni per le quali è stato assente e propone che, in assenza del sig. Cipolla sia nominato Presidente D. Mirimanoff.

Prende la parola il Segretario della Sezione il sig. S. CHERUBINO. *Sui polinomi definiti o semidefiniti.*

B. MEIDELL. *Les fonctions symétriques et les inégalités générales.*

H. W. TURNBULL. *Matrix continued fractions.*

Domandono chiarimenti i sigg. CALLAI e HAZLETT.

La seduta si chiude alle 18,35.

P. S. - In questa seduta e stata esposta la Comunicazione dei sigg. L. POLETTI e E. STURANI. *Le serie dei numeri primi appartenenti alle due forme quadratiche* $(2n^2+2n+1)$ $(2n^2+2n-1)$ *entro 250 milioni.*

Il sig. POLETTI comunicava anche i risultati ottenuti nei suoi lavori precedenti in questo campo.

## SEZIONE I-B

La seduta è aperta alle ore 16,20.

Presidenti H. HAHN ed O. ONICESCU, Segretario G. LAMPARIELLO.

Si svolgono le seguenti Comunicazioni:

H. HAHN. *Ueber stetige Strechenbilder.*

N. GUNTHER. *Sur les intégrales de Stieljes généralisées.*

G. VITALI. *Rapporti inattesi fra alcuni rami della matematica.*

O. ONICESCU. *La notion de saturation et le problème de Dirichlet.*

R. CACCIOPOLI. *Teoria generale del cambiamento di variabili negli integrali doppi.*

P. SCUTIZZI. *Derivée à indice variable.*

## SEZIONE I-C.

La seduta ha avuto inizio alle ore 16,45 sotto la presidenza del prof. A. HAAR.

Sono state fatte le seguenti Comunicazioni:

H. STHEINHAUS. *Quelques applications de l'analyse fonctionnelle à la théorie des fonctions d'une variable réelle.*

F. RIESZ. *Sur la décomposition des opérations fonctionnelles linéaires.*

R. WAVRE. *Sur une classe de fonctionnelles automorphes.*

S. BANACH. *Sur les systèmes d'équations linéaires fonctionnelles.*

L. FANTAPPIÈ. *Sulla teoria dei funzionali analitici.*

L. FANTAPPIÈ. *Le equazioni funzionali lineari e il calcolo simbolico in relazione alla teoria delle matrici nella fisica dei quanti.*

P. FLAMANT. *La notion de transmutation dérivée dans l'étude des transmutations linéaires.*

S. GOTAB. *Sur un théorème rentrant dans le calcul fonctionnel et son application géométrique.*

## SEZIONE I-D.

La seduta si apre alle ore 16,15. Presidente M. PLANCHEREL.

Sono state fatte le seguenti Comunicazioni:

A. BUHL. *Sur la permutabilité des opérateurs différentiels.*

O. NIKODYM. *Sur les fondements des raisonnements locaux de l'analyse classique.*

P. NALLI. *Sopra una operazione introdotta nel calcolo assoluto.*

A. C. DIXON. *Construction of a pair of functions* $\varphi$, $\psi$, *satisfying the equations*

$$\begin{cases} \varphi(z+i\pi)-\varphi(z-i\pi)\pm\{\psi'(z)+\psi''(z)\}=0 \\ \psi(z+i\pi)-\psi(z-i\pi)\pm\{\varphi'(z)-\varphi''(z)\}=0. \end{cases}$$

H. RADEMACHER. *Zur Theorie der Modulfunktionen.*

H. KOEPPLER. *Die Differentialgleichungen des normalen Verteilungsgesetzes der betrachteten Eigenschaften bei einer hinreichend grossen Anzahl von Vertretern einer.*

P. J. MYRBERG. *Ueber diskontinuierliche Gruppen und automorphe Funktionen von mehreren Variabeln.*

L. M. MILNE-THOMSON. *A seven-decimal table of inverse Hyperbolic Cotangentes.*

## SEZIONE II-A.

Alle ore 16,20 il prof. G. FANO, Presidente, dichiara aperta la seduta, dà poi la parola al prof. NICOLADZÉ, che inizia la serie delle Comunicazioni della giornata, le quali si svolgono nell'ordine seguente:

G. NICOLADZÉ. *Sur les systèmes continus des courbes et des surfaces.*

F. MEYER. *Ueber Schliessungsproblem der Kegelschnitte und seine Beziehung zu den elliptischen Funktionrn.*

M. W. HASKELL. *Configurations autopolar in a finite number of ways.*

R. DEAUX. *Sur les faisceau de complexes linéaires.*

R. DEAUX. *Sulle quartiche gobbe.*

A. NARASINGA. *Complex curves on a quadric surface.*

C. SISAM. *On ruled three dimensional varieties of order fivè.*

J. VARELA. *Sobre generacion de curvas orbiformes.*

## SEZIONE II-B.

La seduta è aperta alle ore 16,30 dal prof. G. FUBINI che per l'assenza del Presidente B. BYDŽOWSKÝ già designato per l'odierna seduta, ne assume temporaneamente le funzioni.

La seduta è destinata alla geometria della retta, della sfera, e comprende anche Comunicazioni su argomenti vari.

Si svolgono le seguenti Comunicazioni:

P. C. DELENS. *Conganences de cercles et systemes cycliques.*

G. THOMSEN. *Uber ein problem der Kugelgeometrie.*

ENEA BORTOLOTTI. *Geometria differenziale metrica nello spazio rigato.*

Sopraggiunto il prof. B. BYDŽOVSKÝ, questi assume la presidenza.

Seguono le Comunicazioni:

E. KASNER. *Géometrie des fonctions polygènes.*

P. ZERVOS. *Sur quelques courbes intégrales.*

L. CRELIER. *Sur quelques familles de courbes considerées au point de vue cinématique.*

E. DUMAS. *Sur les singularités des surfaces.*

N. HATZIDAKIS. *Alcune formule sulle congruenze rettilinee.*

La seduta si chiude alle ore 19.

## SEZIONE III-A.

La seduta si apre alle ore 16,25.

Presidente prof. G. GIANFRANCESCHI, Segretario D. GRAFFI.

Si sono svolte le seguenti Comunicazioui:

J. J. SMITH. *Heaviside's operators and contour integrals.*

A. CABRAS. *Fenomeni transitori in un ponte di Wheatstone a costituzione complessa.*

L. DONATI. *Relazioni generali concernenti le reti di trasmissione e distribuzione della energia elettrica, desunte dalla legge di reciprocità.*

G. GIANFRANCESCHI. *I criteri del calcolo delle probabilità dei fenomeni della radiazione.*

A. SMOUROFF. *Die plysikalische Natur der elektrischen Vorgänge in homogenen Isolatoren.*

M. SOLE. *Formule per la calcolazione dei fenomeni nei filtri d'onda elettrici.*

S. TIMPANARO. *Celerimensura magnetica.*

Le Comunicazioni del prof. J. J. SMITH e della sig.na M. SOLE sono state lette dal prof. GIORGI.

Le Comunicazioni dei proff. GIANFRANCESCHI e SMOUROFF hanno dato occasione ad interessanti discussioni, cui hanno partecipato, anche i proff. GIORGI e WATAGHIN.

La seduta è tolta alle ore 18,40.

## SEZIONE III-B.

Presiede il prof. A. Rosenblatt, funge da Segretario il dott. M. Manarini.

Vengono presentate le Comunicazioni seguenti:

A. Denizot. *Critique de la théorie usuelle du pendule de Foucault.*

L. Laboccetta. *Metodo ottico per la determinazione di una unità assoluta di lunghezza di grandezza arbitraria.*

J. Lennertz. *Gegenseitiger Einfluss von Traflaeche und Rumpf.*

E. Schoenbaum. *Une contribution à la théorie de l'ajustement mécanique.*

J. J. Smith. *Heavide's Operators and Contour Integrals.*

G. Tiercy. *Note sur quelques Céphéides.*

G. Tiercy. *Sur l'erreur de compensation des chronomètres de poche.*

G. Kolovrat. *L'obliquité de l'écliptique et le nombre* e.

La seduta termina alle ore 18.

## SEZIONE IV-A.

Nella momentanea assenza del prof· Fréchet, impegnato in un'altra Sezione del Congresso, la presidenza, per designazione della Sottosezione, è assunta dal prof. Darmois.

Vengono presentate e svolte le seguenti Comunicazioni:

L. Galvani. *Estensioni del concetto di media, ed applicazione allo studio della variabilità di una serie statistica.*

A. Gruzewski. *Sur une certaine mesure de dispersion.*

Per invito del Presidente, il prof. Neyman legge il voto formulato dalla Commissione nominata dalla Sottosezione nella sua seduta del 6 settembre per studiare la questione concernente la pubblicazione dei lavori che riguardano il calcolo delle probabilità:

« The Section IV-A of the *Congresso Internazionale dei Matematici di Bologna* (settembre 1928), expresses the wish that the papers concerning the Theory of Probability and its Applications should be as for as possible concentrated in a few journals.

« To facilitate that concentration in its natural way the Section IV-A, asks the Committee to publish in « Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo » the Statistics of papers under consideration and indicate how many of these are published in different journals. That statistics will concern papers mentioned in (2) last volumes of « Jahrbuch der Fortschritte in der Mathematik ». The statistics in question promised to prepare T. Neyman and to send it to other members of the Committee for eventual corrections. Finally the statistics will be sent to prof. Dell'Agnola for publication ».

Il prof. CANTELLI fornisce alcuni chiarimenti sulla lettura fatta dal professore NEYMAN, ed il prof. GINI raccomanda che la statistica delle pubblicazioni sul Calcolo delle probabilità non si limiti alla loro enumerazione, ma comprenda anche il titolo dei lavori.

La Sottosezione approva unanimemente l'ordine del giorno presentato dal prof. NEYMAN a nome della Commissione che la Sottosezione stessa aveva all'uopo costituito.

A nome della medesima Commissione, il Presidente dà lettura di un secondo voto espresso nei seguenti termini:

« La Commission formée par la Section IV-A s'est réunie le 6 Septembre à $6^h\ {}^1/_2$ et a déliberé sur la formation d'un Comité constitutif international pour le progrés du Calcul des probabilités et de toutes ses applications. La formation sera établie prochainement par des rapports personnels en représentant toutes les Nations. Le Comité constitutif est chargé de former une Société internationale sur le type du « Circolo Matematico di Palermo ». Cette Société est chargée de la publication d'un Bulletin qui doit donner des resumés suffisamment longs de toutes les publications parues dans toutes les langues sur les sujets nommés. Les membres de la Société seront élus par le Comité constitutif ».

La Sottosezione approva unanimemente anche questa seconda risoluzione; e pertanto il Presidente invita i Congressisti che intendono far parte del Comitato costitutivo a declinare il loro nome e indirizzo.

Il Comitato costitutivo risulta così formato:

F. M. URBAN, Reitschulgasse 2, Brünn.
O. ONICESCU, Bucarest.
E. J. GUMBEL, Heidelberg.
C. A. DELL'AGNOLA, R. Istituto Superiore di Scienze economiche e commerciali, Venezia.
B. DE FINETTI, Istituto Centrale di Statistica, Roma.
S. D. WICKSELL, University, Lund.
E. C. MOLINA, 195 Broadway, New York.
G. DARMOIS, 8, Rue du Haut Bourgeois, Nancy.
E. SLUTSKY, Nikitsky Boulevard 12ª/13, Moscou, 19.
F. P. CANTELLI, Via Merulana 105, Roma.
A. KHINTCHINE, I Université, Institut Mathématique, Moscou.
L. G. DU PASQUIER, Sablons, 33, Neuchâtel.
J. NEYMAN, Institut Mathématique de l'Université N. Swiat, 72, Varsovie.
A. LOMNICKI, Politechniki, Lwòw.
A. GRUZEWSKI, École Sup. de Commerce, Varsovie.
C. GINI, Istituto di Statistica e Politica Economica R. Università, Via delle Terme di Diocleziano, 10, Roma.
C. JORDAN, 23 Szerbutca, Budapest.

G. PIETRA, R. Università, Padova.

K. G. HAGSTRÖM, Livförsäkringsbolaget Frambiden Stockholm.

Y. MIURA, Chuo (Central) University of Tokio, Kanda.

V. KORINEK, Haute École Technique Karlownàm, Prague II.

Su proposta del prof. DU PASQUIER viene approvata la seguente risoluzione:

« La Section IV du VIII Congrès international des mathématiciens réuni à Bologne en sept. 1928 emet le voeu: 1) que soient publiées les oeuvres complètes de BIENAYMÉ; 2) qu'une édition nouvelle soit faite de celles des oeuvres de COURNOT qui concernent la théorie des probabilités et ses applications ».

Il prof. DARMOIS cede la presidenza al prof. FRÉCHET il quale dispone che siano ripresi i lavori posti all'ordine del giorno. Vengono, pertanto, presentate le seguenti Comunicazioni:

V. ROMANOWSKI. *Sur la généralisation des courbes de Pearson.*

L. MARCH. *Sur la corrélation.*

Le Comunicazioni dei proff. V. ROMANOWSKY e L. MARCH sono presentate dal Segretario della Sottosezione a nome degli Autori che non sono presenti e che hanno scusato la loro assenza. La Sottosezione le accoglie per la pubblicazione degli Atti del Congresso.

G. DARMOIS. *Analyse et comparaison des séries statistiques qui se developpement dans le temps.*

Su questa interessante Comunicazione prende la parola il prof. CANTELLI il quale, in relazione a ciò che l'Autore ha esposto, sottopone alla sua attenzione un notevole problema del Calcolo delle probabilità, finora insoluto.

Prendono anche la parola sullo stesso argomento SLUTKY, MOLINA, URBAN, FRÉCHET, DU PASQUIER, RISSER.

S. D. WICKSELL. *Mathematical Aspects op Population Problems.*

Prendono la parola su tale argomento CANTELLI e GUMBEL.

Il prof. GUMBEL presenta, per la inserzione a verbale, la seguente dichiarazione:

« E. J. GUMBEL (Heidelberg): Die Formel von Knapp ist bereits oft verwendet worden. Wesentlich neu ist dagegen die Ermittlung der Distanz zwischen dem Maximum der Geburten und dem der Bevölkerung. Es wäre sehr interessant, wenn die Bevölkerung als Funktion der Zeit auch im allgemeinen Fall berechnet werden könnte ».

Dovendo il prof. FRÉCHET allontanarsi per altri impegni, la presidenza per invito della Sottosezione è assunta dal prof. GINI.

E. ZYLINSKI. *Numbers of Fibonacci in biological statistics.*

C. JORDAN. *Sur une formule d'interpolation.*

B. DE FINETTI. *Funzione caratteristica di un fenomeno aleatorio.*

E. SCHOENBAUM. *Une contribution à la théorie de l'ajustement mécanique.*

Esaurita la serie delle Comunicazioni il Presidente, prof. GINI, osservando che anche la Sottosezione IV-B ha compiuto i suoi lavori e che parecchi dei Congressisti che vi hanno partecipato sono presenti nell'aula, porge un ringraziamento e un saluto sia ai contributori sia agli altri Congressisti che hanno assistito alle sedute della Sezione IV e dichiara chiusi i lavori della Sezione stessa.

La seduta è tolta alle ore 19,45.

## SEZIONE IV-B.

Presiede il prof. J. GUMBEL. La seduta si inizia alle ore 16,30.

Si svolgono le Comunicazioni seguenti:

B. LAGUNOFF. *Von dem Zusammenhange des Preises mit der Arbeitsleisstung und von der Methode zum auffinden der Punkte der Kurve des regelmässigen Preisenniveau.*

R. ROY. *La demande dans ses rapports avec la répartition des revenus.*

U. TRAVAGLINI. *Contributo allo studio della distribuzione dei redditi.*

G. DEL VECCHIO. *La moneta nella teoria dell'equilibrio economico.*

La Comunicazione del prof. R. ROY è stata presentata dal prof. F. DIVISIA ed ha dato luogo ad una estesa discussione cui hanno preso parte i sigg. L. AMOROSO, G. DEL VECCHIO, F. DIVISIA, J. GUMBEL, A. IVANOFF, O. MORGENSTERN, R. RISSER. Il prof. GUMBEL desidera che sia posta a verbale la seguente dichiarazione:

E. I. GUMBEL. « In dieser Theorie wird die Tatsache nicht verwendet dass ein Teil des Einkommens nicht ausgegeben, sondern gespart wird. Sie ist eine der Grundlagen der Pareto'schen Kurve. Trotzdem wird diese verwendet.

Die Verwendung der Pareto'schen Kurve hat indem den praktischen Nachteil, dass derjenige Teil der Bevölkerung, der keine Einkommenssteuer zahlt, d. h. die Mehrheit der Bevölkerung, überhaupt nicht als vorhanden gilt. Aber auch für die Einkommensteuer zahlende Bevölkerung, die sogen. Bourgeoisie, gilt die Pareto'sche Kurve schlecht, wie man durch Betrachtung der Konzentrationskurve sehen kann.

Es würde sich empfehlen, die tatsächliche Verteilung der Einkommen über die Gesamtvevölkerung zugrunde zu legen und hieraus die Nachfragekurven, wenn dies möglich ist, auf graphischem Wege abzuleiten ».

## SEZIONE V.

Presiede provvisoriamente il prof. C. B. BIEZENO seguito poi, alla Presidenza, dall'ing. V. CASTELLANI.

Vengono trattate le seguenti Comunicazioni:

E. G. BARRILLON. *Au sujet de divers appareils utilisés au tracé des champs hydronamiques.*

A. Testa. *Sulla propagazione degli impulsi nelle linee di tipo telegrafico.*

G. Madia. *I trasformatori telefonici.*

G. Vanni. *Osservazioni sulla teoria della propagazione delle onde Hertziane ed in particolare sulle teorie elettro e magneto ioniche.*

C. Montuschi. « *Dispositivo Catina* » *per la compressione dei foraggi nei silos.*

L. Muzioli. *Considerazioni teoriche, ricerche sperimentali sulla formazione e caduta di goccie d'inchiostro nei riguardi del* « *Logografo Muzioli* ».

## SEZIONE VI.

Non potendo assistere alla seduta il prof. Hatzidakis, designato per la Presidenza della odierna seduta, assume la Presidenza il prof. U. Amaldi.

Si svolgono le Comunicazioni:

A. Farago. *Kozépiskolai Mathematikai és Fizikai Lapok.*

M. G. Sittignani. *L'insegnamento della matematica negli istituti di cultura generale.*

Le seguenti Comunicazioni, pervenute direttamente alla Segreteria del Congresso (senza presentazione di Introduttori) sono state ammesse con espressa riserva, per la pubblicazione negli Atti, del giudizio del Comitato di Redazione:

P. Caminati. *Procedimento nuovo per la soluzione delle equazioni di 3º grado.*

P. Caminati. *Postulato nuovo della geometria euclidea.*

G. Casazza. *Critica delle formule del lavoro.*

G. Ivaldi. *Sui principi della meccanica.*

La seduta ha termine alle ore 19.

## SEZIONE VII.

La seduta ha inizio alle ore 16,30.

Presiede il prof. N. Parfentieff.

Si svolgono le Comunicazioni:

L. C. Karpinski. *Early Algorisms in French.*

R. Marcolongo. *Sullo stato attuale della pubblicazione italiana dei manoscritti di Leonardo da Vinci ed in particolare su quella del Codice Arundel.*

R. C. Archibald. *Plans for reviving* « *Bibliotheca Mathematica* ».

R. C. Archibald. *Georg Hermann Valentin.*

Ettore Bortolotti. *La VII Serie di* « *Aggiunte* » *alla* « *Biblioteca Mat. di P. Riccardi* ».

Ettore Bortolotti. *La pubblicazione delle opere matematiche di P. Ruffini.*

C. Bonacini. *Nel primo centenario della fondazione dell'Osservatorio di Modena.*

O. Neugebauer. *Grandzüge der Altorientalischen Mathematik.*

*Parole in memoria di* E. Hoppe, *del Segretario del Congresso.*

La Comunicazione del prof. Karpinski ha dato occasione ad una discussione cui hanno partecipato anche i proff. Vacca e Parfentieff.

Le Comunicazioni del prof. Archibald hanno provocato un voto di plauso della sezione per le iniziative da esso annunziate e l'approvazione del seguente Ordine del Giorno, proposto dal prof. Ettore Bortolotti:

« La Sezione VII del Congresso Internazionale dei Matematici di Bologna, considerato che la pubblicazione della Biblioteca Generale della matematica, compilata dal dott. Valentin sarebbe del massimo interesse per la storia della matematica e per le ricerche dei matematici di tutto il mondo, fa voto che detta opera venga pubblicata, e non in forma abbreviata, ma integralmente, e corredata da un indice degli autori, nella forma progettata dallo stesso dott. Valentin ».

La Comunicazione del prof. E. Bortolotti relativa alla pubblicazione della VII Serie delle Aggiunte e Correzioni alla *Biblioteca Matematica del Riccardi* ha provocato vivaci espressioni di plauso per l'*Accademia di Modena*, da parte degli intervenuti, ed in particolare dei proff. Vacca, Karpinski, Loria, ed un Ordine del Giorno della Sezione, approvato per acclamazione, nei termini seguenti:

« La Sezione VII del Congresso Internazionale dei Matematici si compiace della pubblicazione della Serie VII delle *Aggiunte e Correzioni alla Biblioteca Matematica del Riccardi*, e plaude all'opera della R. Accademia di Scienze Lettere ed Arti di Modena, che si assunse l'incarico e l'onore di tale pubblicazione ».

La Comunicazione del prof. Neugebauer fu presentata dal Segretario, in assenza del detto professore, giunto tardi al Congresso.

Il prof. E. Bortolotti ha dato notizia della morte del prof. Hoppe che aveva presentato una comunicazione in questa Sezione, e dopo aver brevemente ricordato i meriti di quell'insigne cultore di storia della Scienza, propone alla Sezione il seguente Ordine del Giorno:

« La Sezione VII del Congresso Internazionale dei Matematici adunato in Bologna nel Settembre 1928, dà incarico al Segretario del Congresso di partecipare le sue condoglianze alla famiglia del prof. Hoppe, morto improvvisamente pochi giorni prima dell'apertura del Congresso al quale egli aveva preannunziato una sua Comunicazione, e di chiedere il manoscritto di detta Comunicazione per la inserzione negli Atti del Congresso ».

È approvato.

CONFERENZE

D. HILBERT

# PROBLEME DER GRUNDLEGUNG DER MATHEMATIK

Für die mathematische Wissenschaft waren die letzten Jahrzehnte eine Periode höchster Blüte. Ich erinnere daran, wie in der Arithmetik, insbesondere in der Theorie der algebraischen Zahlkörper die schwierigsten Probleme gelöst und die Vollendung dieses herrlichen Gedankengebäudes erreicht worden ist. Zugleich gelang die Entdeckung der lange gesuchten transzendenten Funktionen, die dem Zahlkörper zugehören und durch die die verborgensten zahlentheoretischen Wahrheiten ans Licht gelangten. Andererseits wurden die Begriffsbildungen der Idealtheorie weit über die Grenzen der Zahlentheorie hinaus auf Algebra und Funktionentheorie mit bestem Erfolge übertragen, und dadurch erhielt ein grosser Komplex mathematischen Wissens ein einheitliches Gefüge.

In der Theorie der Funktionen einer komplexen Veränderlichen sind in dem verflossenen Zeitraum nicht geringe Forschritte gemacht worden. Der Ausbildung des Prinzips der konformen Abbildung insbesondere verdanken wir die herrlichen Methoden zur Gewinnung der automorphen Funktionen und des Problems der Uniformisierung. Die so schwierigen Beweise der Existenzsätze haben durch Anwendung der Methoden der Variationsrechnung den höchsten Grad von Einfachheit und Durchsichtigkeit erreicht.

Und welche Fülle der Gesichter liefert die Geometrie: allein die Topologie ist so sehr durch neue Fragestellungen und Behandlungsmethoden bereichert worden, dass man darin die Entstehung eines neuen selbständigen Wissenszweiges sehen muss. Die Physik liess vor unseren Augen neue mathematische Gedankengebäude erstehen, deren Hallen von imponierender Grossartigkeit sind. Und überhaupt gedenken wir auch der Anwendungen: es sind nicht die schlechtesten Früchte, die die mathematische Forschung auf dem Felde der Anwendungen erntet, sei es dass die Anwendungen anderen Wissengebieten oder praktischen Bedürfnissen entsprangen. Und der Bezirk, in den die Mathematik eindringt, dehnt sich beständig.

Wegen dieser so erfreulichen Sachlage erwächts dem Mathematiker die besondere Pflicht, die Mathematik in ihren Grundlagen zu sichern.

Wie ist doch die allgemein verbreitet populäre Meinung über Mathematik und mathematisches Denken? « Die mathematische Wahrheiten « so sagt man » sind

absolut sicher; denn sie werden auf Grund von Definitionen durch unträgliche Schlüsse bewiesen. Sie müssen daher auch überall in der Wirklichkeit stimmen ». Dieser populären Meinung zufolge sollte die Mathematik zum Vorbild für alle Wissenschaft überhaupt dienen.

Wir wollen nun sehen, ob es so schön mit der Mathematik bestellt ist.

Wie war der Stand der Grundlagenfrage im drittletzten Jahrzehnt? Die grossen Klassiker und Schöpfer der Grundlagenforschung waren DEDEKIND und CANTOR; sie hatten in ZERMELO einen kongenialen Interpreten gefunden. ZERMELO hatte die Annahmen, die zum axiomatischen Aufbau der Mengenlehre nötig sind, aufgestellt und damit die von CANTOR nur unbestimmt und teilweise unbewusst angewandten Mittel in aller Schärfe präzisiert. Diese Zermelo'schen Axiome sind zudem alle von der Art, dass ein ernster Zweifel an ihrer Richtigkeit nicht aufkommen konnte. Das Vorgehen Zermelos war durchaus berechtigt und entspricht der axiomatischen Methode. Doch die Zermelo'schen Bahnen wurden damals unter dem Druck massgebender Kreise verlassen. Alte Einwürfe KRONECKERS gegen DEDEKIND und CANTOR, die wir Jüngeren längst überwunden glaubten, und die KRONECKER selbst niemals in seinen Arbeiten befolgt hatte, wurden vorgesucht. Eine unglückliche Auffassung POINCARÉS, dieser Meisters matematischer Erfindungskunst, betreffend den Schluss von $n$ auf $n+1$, eine Auffassung die überdies bereits zwanzig Jahre früher von DEDEKIND widerlegt war, verrammelte den Weg zum richtigen Vorwärtsschreiten. Ein neues Verbot, das Verbot der « impraedikativen » Aussage wurde erfunden und aufrecht erhalten, obwohl ZERMELO sofort ein schlagendes Beispiel gegen dies Verbot angab. Leider auch die sonst so scharfsinnige Logik RUSSELLS leistete in ihrer Anwendung auf Mathematik der Irrlehre Vorschub. So kam es, dass unsere geliebte Wissenschaft — was die Frage nach ihrem Wesen und ihren Grundlagen betrifft — zwei Jahrzehnte hindurch wie von einem bösen Traum heimgesucht worden ist.

Ich begrüsse es als ein Erwachen, als ein leuchtendes Morgenrot, wenn in letzter Zeit eine Reihe jüngerer Mathematiker wieder auf ZERMELOS Gedanken zurückgehen; diese Mathematiker haben die Zermelo'schen Axiome vervollständigt und eine Reihe sehr wichtiger tiefliegender mit ZERMELOS Axiomatik zusammenhängender Fragen erfolgreich behandelt.

Freilich eine endgültige Lösung der Grundlagenprobleme ist durch dieses alte axiomatische Verfahren niemals möglich. Denn die von ZERMELO zugrunde gelegten Axiome enthalten echte inhaltliche Annahmen. Wenn wir inhaltliche Axiome, mögen sie noch so plausibel sein, als Ausgangspunkte und Grundlagen für die Beweise benutzen, so verliert die Mathematik damit den Charakter des absolut Sicheren. Mit der Annahme von Voraussetzungen kommen wir auf das Gebiet des Problematischen — beruhen doch die Meinungsverschiedenheiten der Menschen meist darauf, dass von verschiedenen Voraussetzungen ausgegangen wird. In einer Reihe von Vorträgen während der letzten Jahre habe ich daher

einen neuen Weg zur Behandlung des Grundlagenproblems betreten. Mit dieser Neubegründung der Mathematik, die man füglich als eine Beweistheorie bezeichnen kann, glaube ich die Grundlagenfragen in der Mathematik als solche endgültig aus der Welt zu schaffen, indem ich jede mathematische Aussage zu einer konkret aufweisbaren und streng ableitbaren Formel mache und dadurch die mathematisch-philosophischen Fragen in die Domäne der reinen Mathematik versetze.

Freilich bedarf es zur vollen Durchführung dieser Aufgabe der hingebenden Mitarbeit der jüngeren Mathematikergeneration.

In diesem Sinne möchte ich heute einige nähere Ausführungen machen. Die wichtigsten Probleme konzentrieren sich auf das von mir aufgestellte sogenannte $\varepsilon$-Axiom; dasselbe lautet

$$A(a) \rightarrow A(\varepsilon A).$$

In der Verwendung des Axioms hat man vor allem die Gattung von Variabeln zu beachten, auf die $\varepsilon$ zu beziehen ist. Bei den Zahlen dient es zur Formulierung der üblichen Schlüsse mit « irgend ein »: man versteht unter $\varepsilon A$ irgend eine Zahl, für die die Aussage $A$ sicher zutrifft, wenn es überhaupt eine Zahl gibt, für die $A$ zutrifft. Für $a$ ist irgend eine ganze Zahl zunehmen.

Ich möchte nun einige Probleme nennen.

Durch die Arbeiten von ACKERMANN und v. NEUMANN ist der Beweis für die Widerspruchsfreiheit des $\varepsilon$-Axioms für die Zahlen geführt: damit sind folgende drei Probleme erledigt:

1) Das Tertium non datur für die Zahlen, d. h. wenn eine Aussage nicht für alle ganze Zahlen gilt, so gibt es eine Zahl, für die sie nicht gilt. So war es z. B. nach KRONECKER unrichtig, eine ganze rationale Funktion einer Variabeln $x$ mit ganzen rationalen Koeffizienten als irreduzibel zu definieren, wenn es keine Zerlegung derselben als Produkt von zwei ebensolchen Funktionen gibt. Ich beweise durch meine Beweistheorie, dass im Gegenteil diese Definition eine völlig strenge Definition in rein mathematischem Sinne ist und dass daher die Behauptung KRONECKERS nicht bloss logisch unzutreffend, sondern auch in rein arithmetischem Sinne unrichtig ist — in gleichem Sinne unrichtig, wie irgend ein falscher zahlentheoretischen Satz oder eine falsche aritmetische Formel.

2) Die Auflösung einer Behauptung über Existenz einer Zahl nach dieser Zahl: « die kleinste Zahl, welche ».

3) Der Schluss von $n$ auf $n+1$.

Wie Sie bemerken, ist ein wesentliches Hilfsmittel für meine Beweistheorie die Begriffsschrift, und wir verdanken dem Klassiker dieser Begriffsschrift, PEANO, die sorgfältigste Pflege und weitgehendste Ausbildung derselben. Die Form, in der ich die Begriffsschrift brauche, ist wesentlich diejenige, die Russell zuerst eingeführt hat.

Bischer noch nicht erledigt sind folgende Probleme.

Problem I. - Der Nachweis für die Widerspruchsfreiheit des $\varepsilon$-Axioms für die Funktionsvariable $f$. Der Ansatz eines Beweises liegt vor. Diesen hat Ackermann auch schon so weit durchgeführt, dass die verbleibende Aufgabe nur noch in dem Beweise eines rein arithmetischen elementaren Endlichkeitssatzes besteht.

Mit der Lösung dieses Problems ist schon ein sehr grosser Komplex von grundsätzlichen Fragen behoben: Nämlich dieser Nachweis der Widerspruchsfreiheit liefert:

1) das Tertium non datur für Funktionen von ganzen Zahlen und damit auch für die reellen Zahlen;

2) die Definitionsprozesse, die als imprädikativ angefochten worden sind, die Russell und Whitehead nur mit Hilfe des sehr problematischen Reduzierbarkeits-Axioms begründen, und mit Bezug auf die Weyl früher einmal von einem Circulus vitiosus in der Analysis gesprochen hat;

3) das Auswahlprinzip in der schwächeren Form.

Zu 3) sei folgendes bemerkt. Es werden in den neueren Betrachtungen über das Auswahlaxiom, wie sie besonders jetzt von den italienischen Mathematikern gepflegt werden, vielfach Unterscheidungen gemacht zwischen schwächeren und schärferen Formen des Auswahlprinzips. Diese betreffen zumeist die Mächtigkeit der Mengen insbesondere den Unterschied des Abzählbaren und Ueberabzählbaren.

Durch die Beweistheorie werden wir veranlasst, vor allen eine anderweitige Unterscheidung als wesentlich anzusehen, nämlich, ob verlangt wird, dass die Auswahl des Repräsentanten für eine Menge unabhängig von der Art, wie die Menge definiert ist, eindeutig durch den Elementen-Bestand der Menge bestimmt sein soll, oder ob dies nicht verlangt wird.

Beispielsweise sei eine einparametrige Mengenschar $M(t)$ vorgelegt. Für jeden Wert des reellem Parameters $t$ bezeichne $M(t)$ eine bestimmte Menge von reellen Zahlen.

Das Auswahlprinzip in der schwächeren Form verlangt dann, dass es eine eindeutige Funhtion $f(t)$ gibt von der Art, dass für jeden Wert von $t$ der Wert $f(t)$ zu $M(t)$ gehört. In der stärkeren Form verlangt das Auswahlprinzip überdies die Existenz einer solchen Funktion $f(t)$, dass

$$f(t_1) = f(t_2)$$

ist, falls die Mengen $M(t_1)$ und $M(t_2)$ ihrem Elementenbestande nach übereinstimmen.

Mit Hilfe des $\varepsilon$ für die Funktionenvariable $f$ erhalten wir das Auswahlprinzip für Mengen von reellen Zahlen in der schwächeren Form.

Durch die Lösung unseres Problems I werden vor allem folgende Theorien beherrscht:

1) Die Theorie der reellen Zahlen. (Dedekindsche Schnitt, obere Grenze einer beschränkten Menge reeller Zahlen).

2) Die Peanosche Begründung der Zahlenlehre. - In dieser Theorie braucht man kein Auswahlprinzip, wohl aber die imprädikative Definition, z. B. die Definition für $a \leqq b$, d. h. jede Menge die $a$ enthält und mit $n$ zugleich $n+1$, enthält auch $b$. Man hat früher immer nur das Problematische bei den mengentheoretischen Begründungen der Zahlentheorie in der Voraussetzung eines unendlichen Individuenbereichs gesehen. Diese Voraussetzung wird bereits auf grund des Bisherigen als widerspruchsfrei erkannt. Die grössere Schwierigkeit liegt in dem Nachweis der Widerspruchsfreiheit der imprädikativen Definition.

3) Die Cantorsche Theorie der Wohlordnungen der Zahlenreihe. Durch diese wird die Lehre von den Zahlen der zweiten Zahlenklasse, welche sich axiomatisch ganz analog zu der Zahlentheorie aufbauen lässt, auf die Theorie der Funktionen von Zahlenvariabeln zurückgeführt.

PROBLEM II. - Für die weitere Ausgestaltung der Analysis, insbesondere für die Punktmengen-Theorie (mengentheoretische Topologie), hat man die Widerspruchsfreiheit für das $\varepsilon$-Axiom, bezogen auf höhere Variablen-Gattungen, zunächst einmal auf die der Funktionen reeller Variabler nötig.

PROBLEM III. - Andererseits gebraucht man zum Beweis des Wohlordnungssatzes und auch für manche Beweise in der Theorie der Messbarkeit (Beweise für Nicht-Messbarkeit) die schon erwähnte Verschärfung des $\varepsilon$-Axiom, wie sie durch die Formel

$$(f)[A(f) \leftrightarrows B(f)] \rightarrow (\varepsilon A = \varepsilon B)$$

ausgedrückt wird (Axiom der Auswahlgleichheit); $\varepsilon A$ und $\varepsilon B$ sind hier Funktionen der Zahlenvariabeln und die Gleichheit bedeutet Uebereinstimnung für alle Argumentwerte. Für die Hinzunahme dieser Formel sind wiederum Beweise der Widerspruchsfreiheit nötig.

PROBLEM IV. - Die Vollständigkeit des Axiomensystems für die Zahlentheorie sowie für die Analysis wird zwar allgemein behauptet. Aber die übliche Ueberlegung, mit der man zeigt, dass je zwei Realisierungen des Axiomensystems der Zahlentheorie, bzw. der Analysis isomorph sein müssen, genügt nicht den Anforderungen finiter Strenge.

Es kommt darauf an, zunächst für die Zahlentheorie, den üblichen Beweis der Isomorphie finit umzugestalten, sodass dadurch folgendes gezeigt wird.

Wenn für einen Satz $\mathfrak{S}$ die Widerspruchsfreiheit mit den Axiomen der Zahlentheorie nachgewiesen werden kann, so kann nicht auch für $\bar{\mathfrak{S}}$ (das Gegenteil von $\mathfrak{S}$) die Widerspruchsfreiheit mit jenen Axiomen nachgewiesen werden, und damit in engsten Zusammenhange: Wenn eine Aussage widerspruchsfrei ist, so ist sie auch beweisbar.

Die Aufgabe ist zunächst hier nur für den Bereich der ganzen Zahlen gestellt worden; sie ist dann sicher keine philosophische, sondern eine rein mathematische und kann nur durch rein mathematische Mittel gelöst werden.

Gegen meine Beweistheorie sind Einwände erhoben worden; diese beruhen wesentlich auf einer Verkennung meiner Beweistheorie. Ich gestatte mir daher, zu dieser noch einige Erläuterungen zu machen.

Wenn eine Aussage oder ein Beweis vorliegt, so muss er sich in allen Teilen überblicken lassen. Die Aufweisung, das Wiedererkennen, die Unterscheidung und Aufeinanderfolge seiner einzelnen Teile ist unmittelbar anschaulich für uns da. Ohne diese Einstellung ist überhaupt ein Denken oder gar eine wissenschaftliche Tätigkeit unmöglich. Wenn ich also von einer Formel, diese als Axiom genommen, konstatieren will, ob sie zu einem Widerspruch führt, so handelt es sich darum, ob mir ein Beweis vorgelegt werden kann, der zu einem Widerspruch führt. Wenn mir ein solcher Beweis nicht vorgelegt werden kann: umso besser - da mir dann ein Eingehen erspart bleibt. Wenn mir der Beweis vorliegt, so darf ich gewisse einzelne Teile herausgreifen und für sich behandeln, insbesondere in ihren auftretenden Zahlzeichen, welche aufgebaut und hergestellt vorliegen, wieder abbauen. Damit wird der Schluss von $n$ auf $n+1$ keineswegs schon benutzt - vielmehr ist es, wie wir schon von Dedekind her wissen und wie es meine Beweistheorie von neuem bestätigt, noch ein weiter Weg, um die Gültigkeit des Schlusses von $n$ auf $n+1$ einzusehen.

Auf der Grundlage, die ich eben diskutiert habe, muss jedesmal der Beweis für die Widerspruchsfreiheit geführt werden. Gelingt es, diesen Beweis zu führen, so bedeutet dies für die Theorie, dass, wenn eine numerische oder finit deutungsfähige Aussage aus ihr abgeleitet wird, diese tatsächlich jedesmal richtig ist. Der Beweis für die Widerspruchsfreiheit lehrt zugleich in jedem Falle eines zu einem falschen Resultat führenden Beweises, die Stelle zu finden, wo der Fehler liegt.

Es liegt auf der Hand, dass auch rein logische Probleme sich durch die Methode der Beweistheorie behandeln lassen. Als Beispiel diene folgendes Problem.

Problem V. - Die Behauptung der Vollständtgkeit des Axiomensystems der Zahlentheorie lässt sich auch so aussprechen: Wird eine dem Bereich der Zahltheorie angehörige aber nicht beweisbare Formel zu den Axiomen der Zahlentheorie hinzugenommen, so kann aus dem erweiterten Axiomensystem ein Widerspruch abgeleitet werden.

Da wir es hier in der Beweistheorie stets mit formalisierten Beweisen zu tun haben, so ist in der ausgesprochenen Behauptung über die Vollständigkeit der Zahlentheorie zugleich die Behauptung eingeschlossen, dass die formalisierten Regeln des logischen Schliessens jedenfalls im Gebiete der Zahlentheorie ausreichend sind.

Die Frage nach der Vollständigkeit des Systems der logischen Regeln, in allgemeiner Form gestellt, bildet ein Problem der theoretischen Logik. Bisher haben wir nur durch Probieren die Ueberzeugung gewonnen, dass diese Regeln ausreichen.

Ein wirklicher Nachweiss dafür ist vorhanden im Bereich der reinen Aussagen-Logik. Im Bereich der Logik der Prädikate mit einem Subjekt kann aus der Methode der Lösung des Entscheidungsproblems ebenfalls ein Nachweis für die Vollständigkeit der Regeln gewonnen werden, wie sie in Anknüpfung an die Ausätze von SCHRÖDER zuerst von LÖWENHEIM und später in abschliessen der Form von BEHMANN zur Anwendung gebracht worden ist.

Mein heutiger Vortrag zeigt, wie viele Probleme noch der Lösung harren. Aber im allgemeinen prinzipiellen Sinne ist auch nicht mehr die leiseste Spur einer Unklarheit möglich: jede prinzipielle Frage lässt sich aufgrund meiner Beweistheorie in einer Weise beantworten, die mathematisch präzise und eindeutig ist. Die betreffenden Sätze lassen sich zum Teil schon jetzt mit Hilfe der bisherigen Ergebnisse auf absolut sichere und rein mathematische Weise beweisen und sind daher, wie ich glaube, dem Streite entzogen worden. Wer mich widerlegen will, muss, wie es in der Mathematik bisher stets üblich war und bleiben wird, mir genau die Stelle zeigen, wo der vermeintliche Fehler von mir liegt. Eine Einwendung, die das nicht tut, lehne ich a limine ab.

Ich glaube, dass meine Beweistheorie uns auch noch einen allgemeinen Dienst leistet. Denn wie wäre es mit der Wahrheit unseres Wissens überhaupt und wie mit der Existenz und dem Fortschritt der Wissenschaft bestellt, wenn es nicht einmal in der Mathematik sichere Wahrheit gäbe? Tatsächlich kommt heutzutage garnicht selten selbst in Fachschriften und öffentlichen Vorträgen Zweifelsucht und Kleinmut gegenüber der Wissenschaft zum Ausdruck; es ist das eine gewisse Art Okultismus, den ich für schädlich halte. Die Beweistheorie beseitigt diese Einstellung und verschafft uns das Hochgefühl der Ueberzeugung, dass wenigstens dem mathematischen Verstande keine Schranken gezogen sind und dass er sogar die Gesetze des eigenen Denkens selbst aufzuspüren vermag. CANTOR hat gesagt: das Wesen der Mathematik besteht in ihrer Freiheit, und ich möchte für die Zweifelsüchtigen und Kleinmütigen hinzufügen: in der Mathematik gibt es kein Ignorabimus: wir können jede sinnvolle Frage durch dauern des Nachdenken lösen. Es erfüllt sich, was vielleicht schon ARISTOTELES vorausfühlte, dass unser Verstand keinerlei geheimnisvolle Künste betreibt, sondern nach bestimmten aufstellbaren Regeln verfährt - worin zugleich die beste Gewähr der absoluten Objektivität liegt.

JACQUES HADAMARD

# LE DÉVELOPPEMENT ET LE RÔLE SCIENTIFIQUE DU CALCUL FONCTIONNEL

Ce n'est pas sans beaucoup d'hésitation, votre Président le sait, que j'ai accepté l'invitation qu'il m'a faite de parler ici du Calcul fonctionnel. Je me suis demandé, et vous vous demanderez sans doute avec moi, s'il appartenait à qui que ce soit de traiter de cette branche de la Science dans la patrie de ses deux fondateurs, et en leur présence, dans un Congrès qui a M. PINCHERLE comme Président et au moment où M. VOLTERRA vient de consacrer à ce sujet ses belles Conférences de Madrid, dont M. FANTAPPIÉ vient de nous donner le texte il y à peu de mois.

Je n'aurais pas triomphé de ces hésitations sans l'amicale spontanéité avec laquelle votre Président m'a proposé ce domaine où il avait lui-même frayé la voie. Je me suis aussi rassuré par la réflexion qu'il ne saurait s'agir aujourd'hui d'une conférence sur le Calcul fonctionnel en soi, pas plus que vous ne pourriez en attendre une sur « l'Algèbre » ou « l'Analyse ». Il y faudrait plusieurs exposés comme celui ci. Deux d'entre eux vous seront déjà offerts dès la réunion qui commence aujourd'hui, l'un par M. VOLTERRA lui-même, l'autre par M. FRÉCHET. Mais avec eux le sujet ainsi lumineusement abordé ne sera certainement pas épuisé, et je ne doute pas qu'il ne faille leur en adjoindre d'autres dans nos Congrès futurs. C'est à ceux-ci comme à ceux-là que je voudrais simplement préluder en vous parlant de la place que le Calcul fonctionnel tient dans la Science, et de la manière dont il s'est imposé à elle.

Si bref que nous devions être, nous remonterons un instant à la naissance du monde — je veux dire à la Science grecque. Les géomètres grecs, sentant la nécessité de limiter leur objet de manière à le pouvoir parfaitement embrasser, n'ont introduit que des figures appartenent à certaines catégories nommément designées (points, droites, etc.) et, en conséquence, que des problèmes dépendant d'un nombre fini et même peu élevé de paramètres. Étudier les relations entre certains nombres laissés invariables dans tout le cours du raisonnement, ainsi que la manière d'utiliser ces relations pour calculer quelques uns d'entre eux, les autres étamt supposés donnés: tel fut, en dernière analyse, l'objet unique de la Science mathématique jusqu'aux temps modernes, si du moins l'on veut

bien, contrairement à la chronologie, mais conformément aux analogies véritables, ajouter à la liste des savants modernes le nom d'ARCHIMÈDE.

Les choses changèrent d'aspect au XVII$^e$ siècle et, à ce moment, il est une ombre qui, si, du fond des Champs Elysées, elle percevait l'écho des choses de ce monde, dut tressaillir de joie et d'orgueil. C'est celle d'HÉRACLITE, le philosophe qui, dès le V$^e$ siècle avant notre ère, avait appris à voir dans le devenir, plus encore que dans l'être, le principe de toutes choses. Sous l'impérieuse nécessité de la Dynamique naissante, c'est sur la variation continue d'un point ou d'une figure que les géomètres portèrent alors leur attention et c'est à ce point de vue qu'ils envisagèrent même beaucoup des problèmes que leur avaient transmis leurs prédécesseurs, en même temps qu'ils s'en posaient de nouveaux. Il apparut que dans l'étude de la Nature, on ne pouvait continuer à considérer comme seule individualité, comme seul objet de recherches, le nombre déterminé ou ses équivalents géométriques, (point, droite, cercle....). L'être mathématique ne fut plus le nombre: ce fut la loi de variation, la fonction.

La Mathématique n'était pas seulement enrichie de nouvelles méthodes: elle était transformée dans son objet.

Transformation si radicale qu'elle ne se fit pas du premier coup. Le mot « fonction » ne reçut pas immédiatement, on le sait, le sens exact que nous lui donnons maintenant. Au temps d'Euler, il signifiait « mode de calcul ». Cette conception, proche encore de celles qui avaient fait l'objet de la Science grecque, dissimulait à l'Analyse le saut qu'elle allait être obligée de faire, tout en lui permettant déjà d'élargir pour ainsi dire sans limite son horizon: car, à partir de DESCARTES, le cercle des opérations auxquelles on put songer à soumettre un nombre arbitraire ne cessa de s'augmenter rapidement.

Cette conception eulerienne de fonction n'est pas d'ailleurs complètement morte aujourd'hui même. Grâce aux développemente en séries, tels que celui de TAYLOR ou de FOURIER et à leurs analogues aujourd'hui connus, elle se montre pratiquement équivalente à celle de DIRICHLET et de RIEMANN. Les deux points de vue continuent à rivaliser en quelque sorte et dans presque tous les problèmes auxquels donnent lieu les fonctions, particulièrement dans presque toute les applications à la Physique mathématique, se rencontre ainsi une dualité de méthode.

Mais une telle dualité n'est, bien entendu, acceptable que dans la mesure et dans les cas, d'ailleurs très étendus, où les deux conceptions peuvent être regardées comme équivalentes; la seule que nous acceptions aujourd'hui sans exception est celle de DIRICHLET-RIEMANN, qui est d'ailleurs l'aboutissement nécessaire de la première, si tant est qu'elle n'ait pas existé déjà plus ou moins inconsciemment dans l'esprit même des fondateurs du Calcul infinitésimal, tant elle représente exactement le point de vue auquel, dès l'abord, ils ont été conduits à se placer.

* * *

On ne peut réfléchir à une pareille évolution sans en prévoir la suite logique.

Il est clair qu'on sera conduit à opérer sur la fonction comme on a opéré sur le nombre, c'est à dire:

1) à regarder la fonction elle-même, non plus comme choisie une fois pour toutes, mais comme arbitrairement et continument variable;

2) à lui faire subir les opérations les plus variées et les plus générales

C'est la réalisation de ce programme qui s'appelle le *Calcul fonctionnel.*

Elle a commencé dès le principe même du Calcul infinitésimal. Les deux opérations fondamentales du Calcul infinitésimal, la différentiation et l'integration, sont précisément des opérations fonctionnelles, à un degré très différent toutefois. La dérivée nous entraine à peine en dehors du cercle des opérations algébriques, au point que, dans beaucoup de cas, tels que l'étude des racines multiples des équations, il soit à peine possible et assurément très illogique de séparer les deux ordres de problèmes. Il en va tout autrement pour la notion d'intégrale définie, qui fait intervenir toutes les valeurs de la fonction, à laquelle chaque élément de la courbe apporte sa part contributive; et là on peut même s'étonner que l'invention d'un pareil symbole n'ait pas conduit plus tôt les géomètres à considérer les fonctions sous le point de vue de DIRICHLET.

En tout cas, ceci explique comment, dans les débuts de l'Analyse infinitésimale, le programme formulé ci-dessus n'a été appliqué d'une manière vraiment systématique qu'à la dérivation, son aboutissement étant, en l'espèce, les recherches de toute nature entreprises sur l'intégration des équations différentielles. Cependant, quelques opérations fonctionnelles représentées par des intégrales définies furent introduites, grâce surtout au génie de LAPLACE. Depuis l'oeuvre même de LAPLACE, les travaux de JACOBI et de POINCARÉ jusqu'à ceux de M. BOREL et de M. PINCHERLE, la transformation de LAPLACE et la méthode des fonctions génératrices n'ont pas cessé d'éclairer la théorie des fonctions, la théorie des équations différentielles, le Calcul des probabilités, l'Arithmétique, etc.

A ces deux chapitres préliminaires se bornerait l'histoire du Calcul fonctionnel dans les siècles qui ont précédé le nôtre, n'était l'apparition du Calcul des variations.

Lorsque JEAN BERNOULLI posa au monde savant le problème de la courbe le long de laquelle un point pesant descend le plus vite possible d'un point donné $A$ à un point donné $B$, force lui fut de considérer non pas seulement une courbe déterminée, donnée ou inconnue, mais l'ensemble des courbes que l'on peut imaginer tracées entre $A$ et $B$, puisque la courbe cherchée doit être comparée à toutes les autres au point de vue du temps de descente employé par le mobile.

C'est donc bien un problème relevant essentiellement du Calcul fonctionnel, et non plus en marge, en quelque sorte, mais au coeur même de ce Calcul, qui fut ainsi proposé à la Science.

Quelle valeur, avait, pour celle-ci, l'initiative prise par BERNOULLI ? On peut, certes, la trouver bien naturelle, après le développement que FERMAT avait donné aux études de maxima et de minima. Mais nous avons été élevés à l'école de maitres — et la génération de mathématiciens français à laquelle j'appartiens pensera surtout à HERMITE — qui n'aimaient point les vaines généralisations et à qui le souci de généraliser ne suffisait pas tant que l'utilité n'en apparaissait pas par ailleurs dans les résultats obtenus et les services rendus à la Science.

Les BERNOULLI et les EULER (je ne parle pas de LAGRANGE pour qui la question ne se posait déjà plus) ont-ils eu la secrète intuition que le Calcul des variations rendrait de tels services ? Notons d'abord que BERNOULLI aurait pu se réclamer de l'application pratique, qui introduit si souvent les questions d'extremum.

Nous savons aujourd'hui qu'il y a autre chose à répondre. Le finalisme, qui a si mauvaise presse parmi les biologistes, tend, par un étrange paradoxe, à nous apparaitre de plus en plus comme régissant universellement toute la nature inorganique. Non seulement la loi de la plupart des phénomènes physiques peut s'exprimer par la condition qu'une quantité convenablement choisie soit extrema — ou, plus exactement, il est vrai, qu'elle soit ce qu'on appelle aujourd'hui *stationnaire,* — mais, depuis LAGRANGE jusqu'aux récentes recherches de Relativité et de Mécanique ondulatoire, il est sans exemple que cette manière de mettre le phénomène en équation n'ait pas été la meilleure, celle qui en éclaire le mieux la nature et qui suggère le plus aisément les retouches à faire subir à la théorie.

Avec le Calcul des variations, le Calcul fonctionnel était incontestablement et définitivement fondé ; mais, par une voie toute différente, l'évolution du Calcul intégral allait le montrer comme nécessaire.

Le grand problème de l'Analyse, lorsqu'a pris fin l'âge d'or où elle n'avait qu'à cueillir à pleines mains ses premiers et merveilleux résultats, a été l'intégration des équations différentielles. Dans cette oeuvre, tous les progrès vraiment essentiels réalisés à notre époque l'ont été en portant l'attention, non seulement sur l'équation différentielle elle même, mais aussi sur les conditions accessoires qui concourent avec elle à déterminer la solution. Intégrer l'équation différentielle ordinaire du premier ordre, n'est plus pour le géomètre contemporain, chercher une fonction de la variable $x$, mais bien chercher une fonction de $x$ et de la costante d'intégration $C$. On a à étudier une fonction de deux variables et non d'une seule.

Ceci ne nous fait pas encore sortir du domaine habituel de l'Analyse classique. Mais il en est autrement si nous en venons aux équations aux dérivées partielles. Non seulement une telle équation, — ce qu'on appelle souvent équation « indéfinie » — ne suffit pas à déterminer la fonction inconnue, mais les conditions « définies » qu'il faut lui adjoindre pour cela introduisent des fonctions arbitraires.

Pour déterminer une solution $u$ de l'équation classique du son, il faut, par exemple, se donner, avec Cauchy, les valeurs de $u$ et celles de $\frac{\partial u}{\partial t}$ pour $t=0$.

Ce sont là deux fonctions $f(x_1, x_2, x_3)$ et $g(x_1, x_2, x_3)$ des coordonnées cartésiennes, et la solution $u$ n'est déterminée qu'une fois connue la forme de ces deux fonctions. Si donc on veut calculer la valeur numérique de $u$ pour des valeurs données quelconques $\xi_1$, $\xi_2$, $\xi_3$, $\tau$ de $x_1$, $x_2$, $x_3$, $t$, on aura là une quantité qui dépendra, bien entendu, de $\xi$, $\tau$, mais qui dépendra aussi de la forme de la fonction $f$ et de celle de la fonction $g$, et non pas même d'une seule valeur prise par $f$ ou d'une seule valeur prise par $g$, (en fait, comme on sait, de la moyenne des valeurs prises par $f$ ou par $g$ sur la surface d'une certaine sphère). Dans le langage actuel du Calcul fonctionnel, et en considérant d'abord $\xi$, $\tau$, comme donnés une fois pour toutes, la quantité cherchée $u$ est une *fonctionnelle* ayant pour arguments les fonction $f$ et $g$, c'est à dire dépendant de la forme de ces fonctions; ou, si l'on veut mettre en évidence le rôle egalement joué par $\xi$, $\tau$, on dira que $u$ est une fonction de $\xi$, $\tau$, *transmuée* du couple de fonctions $f$ et $g$.

Après l'équation du son, qui appartient au type hyperbolique, prenons le problème le plus classique du type elliptique, celui de l'équilibre électrostatique d'un conducteur $C$ placé dans un champ électrique donné ou, analytiquement, le problème de DIRICHLET. L'équation aux dérivées partielles indéfinie est ici l'équation classique des potentiels $\Delta u=0$. Les conditions définies introduisent naturellement le potentiel $V$ du champ inducteur. Mais ici s'introduit, en outre, un autre élément dont nous n'avions pas eu à parler dans le problème précédent, à savoir la forme même de ce conducteur $C$. La valeur de la fonction cherchée $u$ (potentiel créé, à l'extérieur du conducteur, par la simple couche induite) en un point déterminé quelconque ($\xi_1$, $\xi_2$, $\xi_3$) sera encore une fonctionnelle ou, plus exactement, (puisqu'elle depend de $\xi_1$, $\xi_2$, $\xi_3$) une transmuée contenant comme arguments: 1) le potentiel inducteur $V$; 2) la forme de la surface frontière de $C$.

Non seulement le potentiel cherché dépend ainsi d'une part du champ ambiant, de l'autre de la forme du conducteur, mais cette seconde dépendance est d'une nature beaucoup plus profonde et plus compliquée que la première. Par rapport à $V$, la dépendance est linéaire: à la somme de deux champs inducteurs correspond la somme des deux densités superficielles induites correspondantes. On ne peut caractériser aussi simplement le rôle joué par la forme de $C$.

Aucune des méthodes de l'Analyse moderne n'est trop puissante pour l'étude de ce rôle et elle nous offrira sans doute à jamais des mystères à élucider. Un exemple topique à cet égard est fourni par la question du pouvoir des pointes qui, malgré un court article de JOSEPH BERTRAND, peut encore être considérée comme *terra incognita* pour le mathématicien. Toutes les propriétés électrostatiques des conducteurs métalliques dépendent donc de façon fort complexe de la forme de ces conducteurs: la capacité électrique, par exemple, en est une fonctionnelle de nature extrêmement complexe et obscure.

Des faits analogues se présentent d'ailleurs, même à propos d'équations hyperboliques telles que celle par laquelle nous avions commencé. La propagation du son dans un espace limité par des parois solides ou renfermant des corps solides relève encore de l'équation des ondes sphériques; mais les conditions « définies » seront modifiées. On aura à tenir compte d'une part de l'état initial, qui se traduira toujours par des conditions de CAUCHY, mais, d'autre part, aussi des conditions aux parois; et ici encore, dans un pareil « problème mixte », la forme de ces parois jouera un rôle essentiel et très difficile à analyser pour nous.

Enfin, il en serait de même pour les problèmes du type parabolique, tels que celui du refroidissement d'un solide, la forme du solide exerçant encore une influence fondamentale et de nature très cachée.

L'analyse la plus classique ne peut donc s'abstenir de considérer des fonctionnelles de nature très variée et d'étude souvent très difficile. Aussi les plus importants progrès réalisés au XX$^e$ siècle dans la connaissance des problèmes de physique mathématique ont ils été plus ou moins inspirés par les conceptions du Calcul fonctionnel. Lorsque, en 1900, FREDHOLM fit connaitre sa célèbre méthode sur la résolution du problème de DIRICHLET, il y avait trois années que M. PINCHERLE avait publié son Calcul fonctionnel distributif, pour ne pas parler des Mémoires antérieurs; il y en avait treize qu'avaient paru les Notes de M. VOLTERRA sur les fonctions dépendant d'autres fonctions données; il y en avait même quatre qu'il avait fait connaitre les principes essentiels de la théorie des équations intégrales [1] qui portent son nom et dont l'un, nous dirons dans un instant lequel, a de toute évidence, également inspiré FREDHOLM.

* * *

Quels étaient, d'une manière générale, les principes posés par les deux savants qui fondaient ainsi une branche nouvelle des mathématiques? Bornons nous à les caractériser d'un mot. M. PINCHERLE s'est attaché particulièrment à la notion de *transmuée* (dont s'est occupé également notre regretté BOURLET, auquel nous empruntons d'ailleurs la dénomination qui précède), c'est à dire qu'il fait dépendre d'une fonction arbitraire prise comme argument une autre fonction

---

[1] Étudiées également par M. LE ROUX.

résultat. M. VOLTERRA, au contraire, considère ce que nous appelons aujourd'hui une *fonctionnelle*, c'est à dire déduit d'une fonction arbitrairement donnée un simple nombre: par exemple, la capacité électrique d'un conducteur, en tant que dépendant de la forme de ce conducteur.

Un autre caractère qui différencie les deux oeuvres dérive de la dualité des méthodes qui, nous l'avons dit, se présente dans toute la Physique mathématique lorsque s'introduisent des fonctions arbitraires. Jugeant utile de partir du cas le mieux connu avant d'aborder le cas tout à fait général, M. PINCHERLE suppose les plus souvent la fonction-argument $f$ analytique. Il peut, dès lors, la définir par les coefficients de son développement en série entière et procéder par passage à la limite en considérant d'abord un nombre fini de termes de ce développement. C'est en opérant ainsi ([1]), et moyennant certaines restrictions simples imposées aux transmutations envisagées qu'il a pu, par exemple, en représenter le résultat par des séries procédant suivant les dérivées successives de $f$. Cet aspect analytique, un peu délaissé jusqu'à une date toute récente, vient de donner lieu à de remarquables travaux de MM. FANTAPPIÉ et FLAMANT, aussi qu'à de belles recherches de M. POLYÀ.

Au contraire, dans le quart de siècle qui vient de s'écouler, les progrès accomplis dérivent essentiellement des idées de M. VOLTERRA, très différentes des premières, et dont il nous reste à parler. Se plaçant au second des points de vue distingués tout à l'heure, c'est à dire strictement au point de vue de DIRICHLET-RIEMANN, M. VOLTERRA a fait connaitre le procédé de passage à la limite correspondant, procédé qui est, au fond, à la base de la méthode de FREDHOLM, et qui consiste à définir approximativement une courbe par un certain nombre, indéfiniment croissant, de ses points. C'est encore du même point de vue que dérive le second résultat véritablement fondamental obtenu par lui, et qui est d'avoir étendu aux fonctionnelles générales sa notion de *variation*. Si, à la fonction-argument $y=f(x)$, on substitue une fonction très voisine $f_1(x)=y+\delta y$, una fonctionnelle $F$ dépendant des valeurs de $f$ dans un intervalle donné $(a, b)$ recevra un accroissement $\delta F$ lequel, moyennant certaines restrictions simples, sera très petit et représentable par une expression de la forme

$$\delta F=\int_a^b H\, dy\, dx. \tag{1}$$

$H$ est ce qu'on appellera la *dérivée* de la fonctionnelle $F$ par rapport à l'argument $y$. On remarquera que cette dérivée dépend également de $x$ de sorte que la notion de fonctionnelle ramène à celle de transmuée dès qu'on fait intervenir la dérivation.

---

([1]) M. PINCHERLE ne s'est d'ailleurs pas toujours borné à cette attitude et a aussi étudié des fonctionnelles et des transmuées representées par des intégrales définies.

Mais l'expression précédente de $\delta F$ n'est pas la plus générale qu'il convienne d'adopter. L'exemple même du Calcul des variations conduit M. VOLTERRA à y ajouter des termes contenant $\delta y$ en dehors du signe $\int$ par ses valeurs ou même celles de quelques unes de ses dérivées en des points particuliers.

Depuis, on a été conduit à aller plus loin et à se demander si les expressions de $\delta F$ ainsi suggérées par les exemples connus du Calcul des variations étaient les seules que l'on eût à prévoir. Cette dernière question a ouvert une période nouvelle de la théorie qui nous occupe. Les recherches dont nous venons de parler sont, en Calcul fonctionnel, l'analogue de la vieille Analyse classique que l'on caractérise souvent en la rattachant au nom de DUHAMEL. Le Calcul infinitésimal n'a pas pu se contenter de cette première étude. Le Calcul fonctionnel le peut encore moins, parce qu'il opère sur le continu fonctionnel, beaucoup moins simple et moins intuitif pour nous que le continu numérique ordinaire.

Ceci est déjà apparu dès le Calcul des variations. Il a bien fallu, pour décider des maxima ou des minima, qui sont en général des maxima ou des minima relatifs, définir avec précision ce qu'on appelle fonction (ou courbe) voisine d'une autre: avec M. ZERMELO, on a dû distinguer divers ordres de voisinage, le voisinage d'ordre zéro étant celui où l'on sait seulement que chaque point de l'une des courbes est voisin d'un point de l'autre; le voisinage d'ordre un, celui où l'on sait en outre que les pointes des deux tangentes correspondantes sont très voisines, et ainsi de suite. On a même à considérer aujourd'hui des voisinages moins restrictifs encore que le voisinage d'ordre zéro: le plus connu d'entre est le voisinage *en moyenne*, auquel se substituera souvent, je pense, le voisinage *en mesure* qui domine et éclaire le premier. À toutes ces espèces de voisinage entre deux fonctions $f$ correspondent autant d'espèces de continuité pour une fonctionnelle dépendant de l'argument $f$. Une telle fonctionnelle pourra, suivant les cas, être continue, d'ordre zéro, d'ordre un, etc.

Combien d'autres possibilités seraient encore imaginables! Et qu'arriverait-il le jour où, le progrès des applications aidant, on voudrait aller plus loin encore et introduire un continu hyperfonctionnel, dont chaque point correspondrait, non plus à une fonction, mais à une fonctionnelle, et où la notion du voisinage de deux fonctionnelles interviendrait à son tour?

Il était réservé à M. FRÉCHET — et, vers le même moment, à M. E. H. MOORE — de montrer que le plus simple et le plus clair était, cette fois là, de savoir aller d'un coup jusqu'à l'extrême généralité et, poussant jusqu'au bout l'abstraction mathématique, de raisonner sur des éléments de nature entièrement indéterminée, les relations entre ces éléments important seules.

La conférence de M. FRÉCHET vous montrera comment cette attitude hardie a conduit à des résultats d'une clarté et d'une harmonie inattendues. Encore

ont-ils été tous obtenus sans sortir de la logique mathématique habituelle, qui se sent à chaque instant bien timide dans ces domaines, si différents du continu qui nous est familier. Qui sait quelle lumière pourra sortir, à cet égard, des considérations de logique nouvelle dont vous parlait tout à l'heure le grand savant que vous venez d'entendre ?

À ces propriétés des continus fonctionnels et des continus abstraits, se rattacheraient l'étude des quadratures dans l'espace fonctionnel et les recherches mémorables de RENÉ GATEAUX, dont le talent naissant donnait déjà les plus belles espérances lorsqu'il a été brutalement enlevé dès l'été de 1914. C'est en cette circonstance que les propriétés du continu fonctionnel diffèrent le plus profondément de celles du continu ordinaire. La sagacité de GATEAUX a pu cependant étendre au domaine fonctionnel les notions d'intégrale, de volume, de valeur moyenne, de potentiels de volume ou de surface, etc. ; mais ces notions et les relations qu'elles ont entre elles donnent une image en quelque sorte dégénérée des propriétés correspondantes telles que nous les connaissons. Ce chapitre de la théorie est peut-être, en raison de sa difficulté même, celui qui est actuellement le plus éloigné des applications, quoique, comme nous le dirons plus loin, on puisse lui en entrevoir certaines.

Quant à la forme la plus générale à donner à l'expression d'une variation, cette question se rattache en réalité a la conception de vecteur dans les espaces fonctionnels ou abstraits, conception déjà introduite dès les travaux de M. PINCHERLE, mais qui a dû être reprise, aux nouveaux points de vue auxquels se place aujourd'hui l'Analyse fonctionnelle, par M. FRÉCHET et, d'une manière plus approfondie, par MM. NORBERT WIENER et BANACH.

* * *

Mais, de même que l'Analyse classique de DUHAMEL est encore aujourd'hui celle qui sert surtout de base aux calculs courants, les formes les plus simples mentionnées tout à l'heure pour la variation sont aussi les plus usuelles. C'est ainsi que la fonction classique qui s'introduit dans la résolution du problème de DIRICHLET, la fonction de GREEN $g(A, B)$, laquelle dépend naturellement de la forme du domaine, a, lorsque ce domaine varie, une variation de la forme (1) : on trouve, pour le problème plan, par exemple,

$$\delta g_B^A = \frac{1}{2\pi} \int_C \frac{dg_A^M}{dn_M} \frac{dg_B^M}{dn_M} \delta n \, ds_M , \tag{2}$$

$\delta n \, ds$ représentant l'élément d'aire compris entre la frontière primitive $C$ et la frontière déformée ($ds$, élément d'arc de $C$; $\delta n$, distance normale entre les deux courbes).

$\frac{1}{2\pi} \frac{dg_A^M}{dn} \frac{dg_B^M}{dn}$ est, dans ce cas, la *dérivée fonctionnelle,* en chaque point de la

frontière, de $g$ par rapport à la déformation de cette frontière, et l'on a ainsi une *équation aux dérivées fonctionnelles* à laquelle satisfait $g$.

L'emploi de la fonction de GREEN permet, dans l'étude du problème de DIRICHLET, de porter son attention uniquement sur l'influence de la forme du domaine. Mais on peut aussi, avec M. VOLTERRA, tenir compte à la fois de l'influence de cet élément forme et de l'influence des valeurs assignées à une fonction harmonique $u$ le long de la frontière. Il existe alors deux espèces de dérivées fonctionnelles; on trouve entre ces deux dérivées une relation qu'on peut écrire explicitement, et qui donne une *équation aux dérivées fonctionnelles partielles*; et tout extremum d'intégrales multiples donne lieu à une pareille équation, qui est l'analogue de l'équation aux dérivées partielles de HAMILTON-JACOBI.

Ces équations aux dérivées fonctionnelles et aux dérivées fonctionnelles partielles ont fourni à M. PAUL LÉVY les plus beaux résultats. Il faut lire en parliculier, dans ses *Leçons d'Analyse fonctionnelle,* comment on peut étendre aux équations aux dérivées fonctionnelles partielles les notions d'intégrale complète et de caractéristique, ces dernières fournissant les surfaces extrémales d'une intégrale multiple, absolument comme celles de l'équation d'HAMILTON-JACOBI donnent les extrémales d'une intégrale simple.

Après avoir mentionné ces résultats relatifs aux fonctionnelles, parlons un instant de la notion de transmutation. Subordonnée à un certain point de vue à celle de fonctionnelle, elle offre sur elle un avantage important, celui de permettre la combinaison d'opérations de cette espèce et, par consequent, de pouvoir donner lieu à la formation de groupes. Certains groupes de cette nature ont été introduits, voici longtemps, dans trois Notes successives de M. LEVI-CIVITA. Mais les exemples les plus nombreux et les plus importants concernent des groupes d'opérations linéaires fournis par l'étude des équations intégrales de FREDHOLM et de M. VOLTERRA. Ceux-ci, comme on le peut le voir dans les conférences de Madrid, ont fourni à M. VOLTERRA toute une nouvelle Analyse, entièrement parallèle à l'Analyse ordinaire, dont elle utilise pas à pas les résultats. En particulier, tout théorème d'addition, tel que celui des fonctions exponentielles ou trigonométriques ou celui des fonctions elliptiques, donne, pour certaines transcendantes auxquelles conduit la théorie de M. VOLTERRA, un théorème d'addition, mais un théorème d'addition intégral, exprimant $F(x+y)$ non pluss implement en fonction de $F(x)$ et de $F(y)$, mais par une intégrale définie qui introduit les valeurs de $F$ dans les intervalles $(0, x)$ et $(0, y)$.

Or il se trouve que les applications, particulièrement les équations de la Physique mathématique, conduisent précisément à de tels groupes fonctionnels et à de tels théorèmes d'addition intégraux. Nous avons dit que la définition d'une solution de l'équation par des conditions définies la fait connaitre comme une transmuée du système de fonctions qui expriment ces conditions, par exemple,

s'il s'agit du problème de Cauchy, des fonctions $f$ et $g$ qui représentent $u$ et $\frac{\partial u}{\partial t}$ pour $t=t_0$. Si maintenant on porte en particulier son attention sur les valeurs $f_1$ et $g_1$ que prennent $u$ et $\frac{\partial u}{\partial t}$ pour $t=t_0+h$, celles-ci dérivent des premières par une transmutation $T_h$ dépendant du paramètre $h$. Or le principe de HUYGHENS, au moins dans une de ses acceptions, exprime que la famille de transmutations ainsi obtenue forme un groupe. D'une manière précise, on a $T_h \cdot T_k = T_{h+k}$.

Si on examine les calculs par lesquels on intègre l'équation considérée et qui par conséquent, permettent d'écrire effectivement la transformation $T_h$, on voit qu'ils introduisent comme élément essentiel une certaine fonction $v$, dite *solution élémentaire* de l'équation. Notre principe de HUYGHENS, c'est à dire l'existence du groupe qui vient d'être mentionné, se traduit par un théorème d'addition intégral auquel satisfait cette quantité $v$; et nous retrouvons ainsi une nouvelle série de théorèmes d'addition intégraux, de nature un peu différente d'ailleurs de ceux de M. VOLTERRA.

Le problème mixte, à son tour, fournit de même des groupes et des théorèmes d'addition intégraux. Il ouvre même à cet égard un champ plus étendu de possibilités: car outre les transformations $T$ qu'on peut définir par le passage d'une valeur du temps à une autre, il y a celles qu'on obtient en considérant deux positions successives de la paroi.

Les groupes à un paramètre ainsi déduits du principe de HUYGHENS ([1]) soulèvent une question. Nous avons vu que leur structure est la plus simple possible, le produit des deux transformations de paramètres respectifs $h$, $k$ étant la transformation de paramètre $h+k$. Tel est d'ailleurs le cas, non-seulement pour les groupes *ponctuels* ordinaires à un paramètre, mais pour tout groupe à un paramètre (comme le montre la considération du groupe des paramètres correspondant). Seulement, pour les groupes ponctuels, la démonstration classique de LIE repose sur l'existence de la transformation infinitésimale et de la possibilité de reconstruire le groupe à partir de cette transformation par intégration d'un système différentiel ordinaire. Les mêmes faits ont-ils lieu pour les groupes à un paramètre formés de transformations fonctionnelles ?

La réponse a été donnée, pour des cas déjà très généraux, par M. VESSIOT et par M. KOWALEWSKI. On peut la résumer en disant que le raisonnement classique et sa conclusion subsistent dans tous les cas, du moins dans tous les cas linéaires, où la transformation infinitésimale du groupe s'exprime par une fonctionnelle continue d'ordre zéro.

Mais, précisément, ce n'est pas ce qui a lieu pour les groupes engendrés

---

([1]) L'existence de ces groupes a été découverte par M. LE ROUX. Les groupes analogues relatifs aux équations différentielles ordinaires, et qui sont des groupes de Lie, avaient été signalés par M. PICARD.

par le principe de HUYGHENS: les transformations d'un tel groupe *ne sont pas continues d'ordre zéro*; elles introduisent des dérivées plus ou moine élevées des fonctions-arguments. Suivant une importante remarque de M. PAUL LÉVY, ceci peut entrainer une modification très profonde du résultat, l'équation intégro-différentielle qui exprime la transformation infinitésimale devenant alors l'analogue, non plus d'une équation différentielle ordinaire, mais d'une équation aux dérivées partielles. La question reste donc ouverte en réalité.

De nouveaux et très intéressants résultats ont été obtenus, mais toujours pour le cas où la transformation infinitésimale est continue d'ordre zéro, par M. MOISIL, dans une Note récemment insérée aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris.

* * *

Si j'ai insisté un peu plus longuement sur cette question des groupes fonctionnels, que je ne voudrais d'ailleurs pas quitter sans mentionner d'un mot l'intéressante étude des rotations fonctionnelles faite par M. DELSARTE, c'est que je voudrais, en terminant, me placer au point de vue des applications, dont ces propriétés des groupes fonctionnels fournissent un certain nombre.

On peut, en effet, se demander quel progrès tangible nous apporte, quant à présent, la nouvelle doctrine que nous venons d'étudier. Certes, nous savons déjà que la Physique mathématique suggérait presque inéluctablement les nouveaux problèmes que cette doctrine se pose. Mais éclaire-t-elle ou non en quelque façon les problèmes qui s'étaient posés avant elle et en dehors d'elle?

Pareille question aurait pu, notons le bien, être soulevée lors de la fondation de Calcul infinitésimal. Là aussi, surgissaient et d'une manière nécessaire, une série de problèmes d'une nature nouvelle. Mais cependant quelque misonéiste de ce temps là aurait pu s'en tenir à l'étude des types de problèmes traités jusque là par la science antique et demander si, oui on non, les nouvelles conceptions avançaient en quoi que ce soit cette étude.

A ce détracteur du progrès, s'il s'était présenté, les quadratures et cubatures aisément obtenues par les nouvelles méthodes auraient déjà été une réponse, mais, en tout cas, il aurait été réduit au silence à partir du moment où le théorème de ROLLE et la méthode de NEWTON ont permis de résoudre, le plus souvent par des calculs relativement simples, les équations algébriques ou transcendantes les plus diverses, sur lesquelles l'Algèbre antérieure n'avait aucune prise.

Adoptons un istant, nous aussi, cette attitude chagrine et demandons nous si l'Analyse fonctionnelle — ou, plus exactement, conformément à une distinction établie par M. PAUL LÉVY, l'Algèbre fonctionelle — fournit des résultats à l'Analyse tout court.

Entre l'une et l'autre, la ligne de démarcation peut parfois être indécise, certaines méthodes qui relèvent en réalité du Calcul fonctionnel ayant, comme nous

l'avons vu, été introduites avant que son nom fût prononcé. Mais, même alors, il est arrivé que ces méthodes se sont dans ces derniers temps montrées claires et fécondes dans la mesure exacte où elles ont été sciemment et explicitement rattachées au Calcul fonctionnel. C'est, par exemple, en faisant intervenir systématiquement les principes de ce Calcul qu'ont été définitivement éclaircies, dans des travaux récents, les méthodes symboliques par lesquelles M. HEAVISIDE a résolu des problèmes compliqués de propagation électrique; et, dans ce cas, l'utilité du Calcul fonctionnel dépasse le domaine théorique et intéresse l'art même de l'Ingénieur (1). Certains problemes de résistance des matériaux paraissent également relever de principes analogues (1). Rappelons, aussi, dans l'ordre d'idées purement scientifique, cette fois, comment des travaux tels que ceux de MM. ZAREMBA et BOULIGAND ont montré l'avantage qu'il y avait, pour généraliser la définition de certaines quantités, à se baser sur leur mode de continuité fonctionelle.

D'autre part, c'est en envisageant certaines opérations sous le point de vue parfaitement explicite du Calcul fonctionnel que, dès 1898, M. PINCHERLE fournit des démonstrations nouvelles de théorèmes appartenant à la théorie des fonctions sous son sens le plus classique et relatifs aux singularités des fonctions analytiques; il les obtient comme conséquence du développement d'une transmuée analytique suivant les dérivées successives de la fonction-argument.

Venons à la considération des groupes fonctionnels: elle nous promet, nous le savons, des applications du genre de celles que nous recherchons en ce moment. Tout d'abord, c'est à un profond théorème de théorie des équations différentielles qu'aboutissent les Notes précédemment mentionnées de M. LEVI-CIVITA, fondées sur l'emploi de groupes fonctionnels. Puis viennent les théorèmes d'addition intégraux, identités très variées et souvent inattendues dont l'énoncé appartient au Calcul intégral ordinaire.

Ceux qu'a obtenus M. VOLTERRA sont de nature très cachée tant qu'on n'a pas en main le fil conducteur qui les lui a fournis et qui est, lui, de nature fonctionnelle. Ils concernent, il est vrai, des transcendantes qui sont elles mêmes le résultat d'opérations fonctionnelles; ils n'en ont que plus de généralité, par le fait d'introduire une fonction arbitraire. Dans les théorèmes d'addition intégraux fournis par le principe de HUYGHENS et l'interprétation fonctionnelle que nous lui avons reconnue tout à l'heure, figurent, au contraire, les transcendantes les plus classique de l'Analyse. Pour l'équation des télégraphistes, c'est la fonction de Bessel ordinaire. Ce premier résultat, qui se généralise aisément aux fonctions de Bessel d'indice quelconque et que l'on peut considérer comme caractéristique de ces fonctions, avait été obtenu directement, sans la théorie actuelle, par notre regretté collègue CAILLIER, de Genève. Mais il n'en est pas

(1) Voir les traveaux récents de M. P. LÉVY et aussi de M. GIORGI.

de même de ceux que fournissent, par la même voie, d'autres équations aux dérivées partielles classiques. C'est ainsi qu'en partant de l'équation d'Euler et de Poisson, on trouve une propriété intégrale de la série hypergéométrique, laquelle n'avait pas été découverte antérieurement, bien que, à ma domande, CAILLIER ait pu la retrouver et même la généraliser par voie directe.

Si enfin on s'adresse à l'équation de la chaleur, on rencontre le problème mixte et, par conséquent, comme nous l'avons dit, le principe peut s'appliquer de plusieurs manières différentes ; et c'est ainsi que MM. F. BERNSTEIN et DOETSCH ont obtenu, pour des transcendantes aussi connues et aussi fondamentales que les fonctions de JACOBI, des propriétés intégrales entièrement nouvelles.

Tournons nous maintenant d'un autre côté et considérons la formule précédemment rappelée

$$\delta g_B^A = \frac{1}{2\pi} \int_C \frac{dg_A^M}{dn} \frac{dg_B^M}{dn} \delta n \, ds_M$$

(ou la formule analogue de l'espace à trois dimensions) qui donne la variation de la fonction de GREEN par déformation du domaine auquel elle est relative. Si cette déformation a lieu partout dans le même sens, le nouveau domaine étant, par exemple, partout en retrait par rapport à l'ancien, la formule met immédiatement en évidence ce fait connu que la fonction de GREEN diminue dans ces conditions ; mais elle permet de dépasser singulièrement cette première constatation qualitative : par cela seul qu'elle l'exprime quantitativement, elle lui apporte des compléments qui, eux, sont beaucoup plus cachés. Elle nous offre le moyen d'exprimer, par simple différentiation de l'intégrale précédente, les variations subies par les dérivées, d'ordre aussi élevé qu'on le veut, de la fonction de GREEN $g$ par rapport aux coordonnées des deux points dont elle dépend : et, grâce en particulier à l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ, on obtient ainsi immédiatement des inégalités auxquelles satisfont les variations et, par voie de conséquence, les altérations finies subies par ces dérivées d'ordre quelconque lorsqu'on passe d'un domaine déterminé à un autre intérieur. Aucune des méthodes directes n'a fourni jusqu'ici de semblables résultats, dont l'utilité a eu cependant l'occasion de se manifester dès à présent. Il semble que la formule qui nous a été inspirée par le Calcul fonctionnel pénètre ici bien plus au fond des choses que toutes les méthodes antérieures. Notons en particulier qu'elle permet, au moins sous des conditions très peu restrictives imposées au domaine, d'obtenir des développements majorants de celui de la fonction de GREEN ; et c'est là encore un résultat peu accessible par d'autres voies.

De plus, tout ces résultats s'étendent d'eux mêmes à beaucoup d'autres équations aux dérivées partielles, des formules tout analogues pouvant être écrites

pour les fonctions de GREEN correspondantes, quels que soient les problèmes aux limites (linéaires) considérés.

A ce point de vue, une conséquence d'ordre tout différent se dégage des formules de variation dont il s'agit. On constate que les fonctions de GREEN ainsi déduites d'équations diverses, satisfont à un loi qui leur est commune à toutes, et qui se retrouve même non plus seulement pour le type elliptique mais pour les équations des types hyperbolique et parabolique, en raison des problèmes mixtes qui se posent pour de telles équations. Cette loi s'exprime par une équation aux dérivées fonctionnelles et, par conséquent, ne nous fait pas sortir du cercle du Calcul fonctionnel. Mais il semble qu'elle doive entrainer, entre les expressions dont il s'agit, des relations, et des résultats de cette forme ont déjà été notés dans certains Mémoires de M. PAUL LÉVY.

Le Calcul fonctionnel nous réserve d'ailleurs sans doute des surprises dans beaucoup d'autres directions. On peut, par exemple, se demander, avec M. MICHAL, si, aux invariants intégraux des systèmes différentiels traités par POINCARÉ, on ne pourra pas adjoindre d'autre fonctionnelles invariantes dans les mêmes conditions.

N'oublions pas non plus la généralisation de la méthode de HAMILTON JACOBI obtenue par une équation aux dérivées fonctionnelles partielles. Or, la méthode primitive d'HAMILTON JACOBI fournit dans des cas particulièrement intéressants, tels que ceux de LIOUVILLE STÄCKEL, l'intégration des équations de la Dynamique. On voit donc qu'il y a lieu de rechercher si l'integration d'une équations aux dérivées fonctionnelles partielles ne permettra pas, moyennant les résultats obtenus par M. PAUL LÉVY, l'intégration d'une équation ou d'un système aux dérivées partielles du Calcul des variations.

Mais la voie la plus étendue qui s'offre aux applications du Calcul fonctionnel est peut-être celle même qui, nous l'avons rappelé il y a un instant, a permis à l'Analyse infinitésimale naissante de rendre d'importants services à l'Algèbre. Le problème le plus important et le plus difficile de l'Analyse classique, la determination d'une fonction inconnue par des conditions différentielles, intégrales, fonctionnelles, etc., est sous le point de vue auquel nous plaçons actuellement, l'analogue du problème général de l'Algèbre, qui est la détermination d'un point dans un espace à un nombre déterminé $n$ de dimensions par un système de $n$ conditions.

La difficulté nouvelle qui va se présenter toutefois dans le passage de l'un à l'autre est qu'il faut considérer le nombre $n$ comme augmentant indéfiniment, et ceci montre que nous devons en l'espèce attacher une importance particulière aux résultats de la théorie des équations qui sont indépendants du nombre des dimensions. Par exemple, nous ne pouvons pas nous contenter du théorème de ROLLE sous sa forme la plus usuelle: nous devons, au contraire, en retenir

l'extension d'après laquelle une fonction continue et dérivable, nulle en tous les points de la frontière d'un domaine, doit être stationnaire (et même extrêma) en un point au moins de l'intérieur de ce domaine.

On ne peut cependant pas, en général, éliminer complètement la notion du nombre des dimensions (que, d'ailleurs, comme nous le rappellerons dans un instant, on sait transposer aux espaces abstraits mais, à un point de vue un peu différent) : il en reste une trace par le fait que le nombre des conditions doit être égal au nombre des inconnues. C'est ce qui a lieu, par exemple, pour le théorème le plus fondamental à cet égard, soit qu'on l'énonce sous sa forme classique, soit plutot qu'on lui préfère la forme dont part M. GOURSAT, dans laquelle les équations s'écrivent

$$Y_i = \varphi_i(y_1, ...., y_n; x) = y_i \qquad (i = 1, 2, ...., n)$$

avec une condition de LIPSCHITZ exprimant que, du moins dans un certain domaine, la distance de deux points $(Y_1', Y_2', ...., Y_n')$ et $(Y_1, Y_2, ...., Y_n)$ est inférieure, au moins dans un rapport déterminé $K < 1$, à celle des deux points $y'$, $y$ qui leur ont donné naissance.

Les deux principes que nous venons ainsi de mentionner sont dores et déjà transposés à l'espace fonctionnel. En ce qui concerne la considération de maximum et de minimum qui est à la base du théorème de ROLLE, le fait est classique. Le Calcul fonctionnel peut et doit revendiquer comme siens non seulement le célèbre raisonnement par lequel RIEMANN a proposé de démontrer le principe de DIRICHLET mais au même degré, tous les perfectionnements qui, à partir de l'oeuvre d'ARZELÀ et de celle de M. HILBERT, ont constitué l'aperçu de RIEMANN en analyse parfaitement rigoureuse.

L'extension du théorème des fonctions implicites sous sa forme classique a été faite par M. VOLTERRA dans ses Leçons professées à Paris sur les fonctions de lignes, et des compléments importants ont été apportés aux résultats par M. PÉRÈS. Le jacobien qui figure dans l'énoncé habituel est alors remplacé par le déterminant d'une certaine équation intégrale. La méthode employée est d'ailleurs inspirée de celle qui a servi à M. GOURSAT. Mais comme l'ont noté un peu plus tard M. EVANS, et plus récemment encore M. HILDEBRANDT et M. GRAVES' l'extension est plus directe et plus facile encore lorsqu'on serre de plus près encore l'analogie avec l'analyse même de M. GOURSAT. La méthode se transporte sans aucune modification à l'espace fonctionnel et il est tout aussi aisé d'arriver au même résultat pour des espaces métriques abstraits.

Il n'est pas inutile de noter que, dans l'espace fonctionnel comme dans les espaces ordinaires, les deux résultats précédents ne sont pas seulement des démonstrations d'existence, mais des méthodes de calcul permettant, au moins théoriquement, d'exprimer les solutions cherchées.

En tout cas, voilà obtenu l'équivalent des résultats qui, en Analyse classique,

permettent la définition des fonctions implicites ou, ce qui revient au même, l'inversion des transformations ponctuelles au point de vue *local*, c'est à dire dans une région suffisamment peu étendue autour d'une première solution supposée connue. Peut-on échapper à cette condition restrictive et obtenir un résultat valable dans tout l'étendue des espaces que l'on a à considérer?

Il existe un théorème qui permet d'y arriver dans les espaces à un nombre fini de dimensions. Soit, dans un tel espace, une transformation ponctuelle continue faisant correspondre à un point arbitraire $m$ un point image $M$. Pour que la transformation inverse existe également et soit univoque, autrement dit, pour que tout point $M$ dérive d'un point $m$ et d'un seul, il est nécessaire et suffisant: 1°, qu'il en soit toujours ainsi au point de vue local (c'est à dire au voisinage d'un point quelconque $m$ et de son image $M$); 2°, qu'il n'existe aucun chemin décrit par $m$ et s'éloignant indéfiniment auquel corresponde, pour $M$, un chemin de longueur finie. L'énoncé et la démonstration de ce théorème étant indépendants tous deux du nombre des dimensions, il est particulièrement indiqué de chercher à l'étendre à l'espace fonctionnel. Cette extension a été effectivement obtenue par M. Paul Lévy, tout au moins dans le cas d'espaces fonctionnels.

Il est un autre théoreme qui subsiste également avec le même énoncé pour tous les nombres finis de dimensions et et qui caractérise tout particulièrement l'égalité de ce nombre pour les espaces primitif et transformé. C'est celui qui est dû à M. Schönflies et qui peut, d'un mot, se résumer ainsi: si les équations qui expriment une correspondance ponctuelle sont telles que, dans une région suffisemment petite autour d'un point detérminé quelconque, elles ne peuvent jamais admettre plus d'une solution, il en résulte que, dans une telle région, elles en admettent nécessairement une, du moment que la correspondance a lieu entre espaces de même nombre de dimensions. Il serait d'un haut intérêt de rechercher les conditions moyennant lesquelles une telle propriété pourrait être énoncée entre espaces fonctionnels, ou, plus généralement, entre espaces abstraits.

Cette question est intimement liée à celle de l'indice de Kronecker, conception dont on sait la merveilleuse puissance dans l'étude des systèmes d'équations à plusieurs inconnues et des correspondances ponctuelles ou vectorielles. L'indice de Kronecker se présente, on le sait, comme un potentiel de double couche et, par conséquent, son extension au Calcul fonctionnel pourra, il est permis de l'espérer, se déduire des recherches de Gateaux. Il semble cependant que cela ne puisse se faire sans d'assez sérieuses difficultés.

Une autre propriété voisine de la précédente pourra peut être abordée plus aisément à ce point de vue: nous voulons parler du théorème découvert indépendamment par Poincaré et par Bohl. Quoiqu'il soit, dans son énoncé général, lié à l'indice de Kronecker, on peut en retenir un cas particulier qui s'exprime sans

faire intervenir cet indice. Si deux champs de vecteurs définis dans un même domaine son tels que, dans l'intérieur de ce domaine, l'un des champs ne s'annule jamais tandis que l'autre s'y annule une fois et une seule (sans qu'il s'agisse d'une solution multiple), il existe, sur la frontière, au moins un point où les deux champs sont de direction directement opposée. Cette propriété si simple et si féconde est encore de celles que l'on peut espérer étendre dans les domaines qui nous occupent.

Seulement, encore une fois, les théorèmes de cette espèce, particulièrement celui de M. Schoenflies, sont caractéristiques de l'égalité du nombre des dimension. Cette notion de nombre dimensionnel, ou, plutôt, de type de dimension a été étendue à l'espace fonctionnel et même aux espaces abstraits par les travaux de M. Fréchet et ceux qu'ils ont inspirés à des géometres tels que M. Banach. Une question importante serait de savoir si, entre la notion ainsi définie dans ses nouvelles conditions et les propriétés dont nous venons de parler, une relation existe.

Mais c'est peut être assez ou trop longtemps s'engager dans la voie des anticipations et d'hypothèses que l'avenir démentira peut être. Nous retrouvons un résultat positif et acquis à la science avec un remarquable Mémoire de MM. Birkhoff et Kellogg démontrant, dans des circonstances très générales, l'existence d'un point invariant par une transformation ponctuelle. Le nombre des dimensions étant supposé fini, cette existence est certaine, dans un domaine déterminé $R$ convexe au moins par rapport à un point $O$, dès que la transformation change $R$ en un domaine $R'$ intérieur au premier. Les auteurs démontrent cette première conclusion par une analyse assez délicate ; en réalité, comme l'a remarqué M. Vessiot, elle ressort immédiatement du théorème de Poincaré-Bohl mentionné il y a un instant. Mais l'essentiel est que, et même par deux voies différentes, — à savoir par l'un comme par l'autre des deux modes de passage à la limite qui, nous l'avons dit, interviennent concurrement dans ces théories — le résultat s'étend à des champs fonctionnels assez généraux. MM. Birkhoff et Kellogg ont pu immédiatement indiquer une catégorie importante d'applications, et cela à un des sujets dont s'occupe le plus activement l'analyse contemporaine, l'intégration d'une équation différentielle ordinaire d'ordre quelconque avec un nombre correspondant de conditions accessoires. Dans des cas incomparablement plus variés et plus généraux que ceux qui ont été abordés par ailleurs, le théorème dont il s'agit permet d'affimer l'existence de la solution.

Des équations intégrales telles que

$$\varphi(x)=\lambda\int_0^r \varphi^2(y)K(x,y)dy$$

relèvent encore de principes analogues, l'existence de la solution étant certaine

pour celle que nous venons d'écrire, dès que le noyau $K(x, y)$ est borné et admet une borne inférieure positive.

Une étude plus approfondie de la littérature récente conduirait sans doute à noter d'autre découvertes du même genre, que je m'excuse envers leurs auteurs d'avoir omises ici. Celles que je viens de citer suffisent à calmer les crupule qui nous était venu et à montrer que le Calcul fonctionnel n'est pas une spéculation gratuite, qu'il a dès à présent fait ses preuves. Je serai satisfait si j'ai pu faire passer cette conviction dans l'esprit de ceux qui ont bien voulu m'entendre aujourd'hui.

UMBERTO PUPPINI

# LE BONIFICHE IN ITALIA

1. - Alla parola « bonifica » noi diamo un significato assai ampio. Intendiamo tutto quell'insieme di opere che servono a mettere in istato di felice cultura e di sana abitabilità le zone di terreni che, per situazioni o naturali o prodotte dall'uomo, non potrebbero essere nè proficuamente coltivate nè igienicamente abitate.

Possono essere bisognosi di bonifica sia terreni di pianura, sia terreni di montagna. La caratteristica essenziale di una zona da bonificare può manifestarsi sia nella necessità di allontanamento di acque ristagnanti o male scolanti, sia in quella della provvista di acque potabili e irrigue, sia nell'una e nell'altra necessità insieme. Alle quali necessità e ai relativi provvedimenti di ordine idraulico si considerano oggi associate tutte le opere occorrenti per la sistemazione agraria, igienica, demografica: quindi lavori di sistemazione agraria del terreno, costruzione di case, esecuzione di strade, provvedimenti antimalarici rientrano nel quadro della così detta bonifica completa integrale, quadro che si può dire perciò coincidere con quello della totale redenzione di una regione.

Ma, in questo breve discorso, intendo di fermarmi precipuamente su quelle opere di bonifica idraulica che presentino vantaggi igienici ed economici di prevalente interesse sociale e che siano relative all'allontanamento e al governo delle acque, cioè sulle opere che sono le prime, le fondamentali, indispensabili perchè le successive, agrarie, igieniche, stradali, edilizie, possano iniziarsi ragionevolmente, e iniziate giungano a buon fine, e giunte a buon fine si conservino durature ed efficaci. Le opere, alle quali si riferiscono i molto significativi dati statistici che tra breve esporrò, riflettono pertanto in principalissimo luogo la escavazione di reti di canali di scolo e la costruzione dei manufatti inerenti, e fra questi gli impianti idrovori; comprendono pure talune sistemazioni montane e vallive di fiumi e di torrenti; comprendono inoltre i casi di alto interesse nei quali la quota della superficie del terreno ha subìto un generale sollevamento a mezzo di lavori di colmata.

2. - Non intendo di farmi enunciatore e rivendicatore di primati. Ma posso certo affermare che in Italia le opere di bonifica hanno avuto remotissima appli-

cazione. Già popoli preromani, come gli Etruschi, si dedicarono a lavori di bonifica. E questi ebbero particolare impulso nell'epoca gloriosa di Roma. Quando la potenza di Roma decadde, subirono arresto anche i lavori di risanamento del terreno, e molti di quelli eseguiti furono lasciati in abbandono, sicchè terre già redente tornarono alla condizione di terre palustri: così fu, ad esempio, delle Paludi Pontine.

I lavori di bonifica furono ripresi nei secoli dal 10° al 15° dopo Cristo, subirono una sosta nel secolo 16° e nei successivi. Ma nel secolo 19°, e precisamente nella seconda metà di esso, dopo il 1860, cioè dopo la costituzione del Regno d'Italia, si ebbe un risveglio nelle bonifiche idrauliche, risveglio che si accentuò nel secolo 20° e portò alla attuale fervente attività, che non si arresterà — noi ne siamo sicuri — sino ad opere completamente e felicemente ultimate per tutta quella parte del suolo della Patria che di bonifica idraulica dimostra di avere bisogno.

3. - È veramente notevole la estensione del territorio italiano in cui lavori di bonifica idraulica, o sono già stati compiuti, o si stanno eseguendo, o si dovranno iniziare.

Sulla estensione di 310.000 Kmq., cioè 31 milioni di ettari, del territorio nazionale, ettari 2.400.000, cioè più della tredicesima parte di esso territorio, sono stati, o sono attualmente, o saranno oggetto della sistematica, regolare esecuzione di grandi opere di bonifica idraulica.

Debbo però osservare che, nel fatto, la estensione del territorio nazionale, che indirettamente si avvantaggerà per le eseguite opere idrauliche, è ben più vasta che non la estensione sopra detta, sede precisa delle opere idrauliche di bonifica. Molte zone vicine alle zone idraulicamente bonificate ne ritraggono e ne ritrarranno considerevoli vantaggi igienici e agrari. Sicchè, nel senso più lato che già ho detto si può dare alla parola bonifica, risulta più assai che la tredicesima parte del territorio nazionale avvantaggiato dalle opere di bonifica idraulica: così come la guarigione di malati risulta di beneficio, non ad essi soltanto, ma anche al livello igienico dell'ambiente, della società della quale essi sono parte.

Nei suddetti 2.400.000 ettari, oggetto passato, presente o futuro di bonifica idraulica, questa può ritenersi nel fatto già conseguita, salvo soltanto l'esecuzione di talune opere di completamento, in cifra tonda per 1.250.000 ettari cioè per poco più della metà dei totali 2.400.000 ettari, in corso di esecuzione o con certezza di imminente inizio per 600.000 ettari, ancora allo studio per 550.000 ettari.

I comprensori di bonifica, in cui i lavori sono ultimati o sono in corso o sono di inizio imminente (per un totale, secondo quanto si è detto, di

1.250.000 + 600.000 = 1.850.000 ettari), ne comprendono, oltre molti minori, 48 di estensione superiore, per ognuno, ai 10.000 ettari. Tra questi:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 24 | sono fra | 10.000 | e | 20.000 | ettari, |
| 10 | » » | 20.000 | e | 30.000 | » |
| 4 | » » | 30.000 | e | 40.000 | » |
| 2 | » » | 40.000 | e | 50.000 | » |
| 3 | » » | 50.000 | e | 60.000 | » |
| 2 | » » | 60.000 | e | 80.000 | » |
| 2 | » » | 80.000 | e | 100.000 | » |

1 ha estensione maggiore di 100.000 ettari.

Fra 50.000 e 60.000 ettari sono la Bonifica Cremonese Mantovana, la Grande Bonificazione Ferrarese, la Bonifica Paludi dei Regi Laghi.

Fra 60.000 e 80.000 ettari sono la Bonifica Ravennate fra Sillaro e Lamone, la Bonifica di Burana.

Sono tra 80.000 e 100.000 ettari la Bonifica Renana (86.181 ettari) e la Bonifica Parmigiana Moglia (82.396). Supera i 100.000 ettari la Bonifica delle Valli Grandi Veronesi ed Ostigliesi con una estensione di 117.976 ettari.

4. - Si tratta, come ben si vede di un grandioso compito tecnico in cui la Nazione è impegnata e anche di un grandioso sforzo finanziario.

L'attuazione di opere così vaste viene compiuta sia direttamente dallo Stato, sia da Consorzi di proprietari dei terreni. Ed è regolata da una legislazione che si può dire ebbe inizio con una legge dal 1882 dovuta ad ALFREDO BACCARINI, e che è culminata nel Testo unico approvato con R. D. 30 dicembre 1923 n. 3256, modificato da alcune disposizioni successive: D. L. 5 febbraio 1925 n. 166, D. L. 29 novembre 1925 n. 2464, D. L. 7 febbraio 1926 n. 191.

Nella spesa per le opere di bonifica idraulica, cui si riferiscono i riportati dati statistici, cioè per le opere di bonifica che presentino vantaggi igienici ed economici di prevalente interesse sociale, lo Stato concorre nella misura dal 56 al 75 % a seconda dei casi, le Provincie nella misura dal 10 al 12,50 %. Il resto è a carico dei proprietari dei terreni.

Nel caso di esecuzione delle bonifiche da parte dei Consorzi concessionari, Stato e Provincie intervengono col loro contributo, che viene pagato in diverse annualità, solo dopo il collaudo dei lavori. Il Consorzio, per iniziare i lavori, deve procurarsi, con finanziamento provvisorio, il capitale occorrente. Il finanziamento provvisorio viene poi sostituito con finanziamento definitivo, mano a mano che, mediante situazioni parziali e quella finale, si rendano liquide le annualità di contributo dello Stato e delle Provincie.

Sugli ettari 1.250.000 a bonifica idraulica già conseguita, questa fu attuata

per 350.000 ettari direttamente dallo Stato, per 900.000 da Consorzi concessionari; sui 600.000 ettari di bonifica in corso o di imminente inizio, 225.000 sono in diretta esecuzione da parte dello Stato, 375.000 sono affidati a Consorzi; sui 550.000 ettari di bonifica ancora allo studio, 70.000 riguardano l'opera diretta dallo Stato, 480.000 l'opera dei Consorzi.

La spesa che si prevede per il completamento delle bonifiche già efficienti, per l'ultimazione delle bonifiche in corso, per la esecuzione di tutte le bonifiche idrauliche non ancora iniziate è di lire quattro miliardi e mezzo. La spesa che è stata fatta negli ultimi cinque anni, è stata di lire 1.100.000.000, di cui lire 400.000.000 per lavori in esecuzione diretta dallo Stato, lire 700.000.000 per lavori in concessione ai proprietari delle terre. La previsione della spesa futura per la sola bonifica idraulica è pertanto quadrupla di quella sostenuta nell'ultimo quinquennio. A tale spesa si andrà poi ad aggiungere, con somma molto considerevole, quella che occorre per tutto l'insieme di successive opere per sistemazioni agrarie, igieniche, stradali, edilizie.

5. - Ho detto che si tratta di un grandioso sforzo tecnico-finanziario che è in atto. Esso non potrà avere compimento se non nel corso di oltre un decennio.

I risultati saranno peraltro notevolissimi. Basta, ad esempio, pensare che, per 350.000 ettari bonificati nell'Alta Italia sino al 1922, si calcolò che la produzione agricola annua sia salita, da lire 138.000.000 prima della bonifica a lire 1.050.000.000 dopo la bonifica, cioè da circa lire 400 annue per ettaro a lire 3000 annue. Così dagli ettari 1.150.000 in corso e in attesa di bonifica prevediamo una maggiore produzione agraria per l'importo da tre a quattro miliardi annui di lire, cioè per un importo che supera la somma annua che l'Italia spende all'estero per acquisto di grano negli anni di più scarsa produzione locale.

Questo grandioso compito bonificatore dell'Italia — che si estende anche a vaste zone non bisognose di bonifica idraulica, ma atte a bonifica agraria, cioè a notevole intensificazione culturale — porterà, in adeguato volgere di anni, a un aumento di circa 20.000.000 di quintali annui di cereali e a un aumento non precisabile, ma certo enorme di tutti gli altri prodotti agrari, come barbabietole da zucchero, foraggi, uva, canapa, tabacco, ortaggi, frutta.

Tutto ciò influirà beneficamente sulla bilancia commerciale riducendo le importazioni e accrescendo le esportazioni, e assicurerà alla finanza dello Stato un reddito perenne annuo di centinaia di milioni di lire per tasse e dazi, sicchè lo Stato vedrà largamente compensati, non solo nella accresciuta efficienza nazionale, ma anche nelle cifre del proprio bilancio, l'impresa a cui si è accinto e l'onere che oggi sostiene.

* * *

6. - Questa intensa azione bonificatrice, questa volontà tesa a un arduo programma tecnico-finanziario è uno degli aspetti del nostro lavoro, della nostra

attività. Altro aspetto, che non completa il quadro della rinascita italiana ma che ha altissimo rilievo e che ha anche punti di contatto colle opere di bonifica, è quello della produzione della energia elettrica. Consentite un breve cenno, anche se abbia apparenza di digressione dal tema.

La produzione di energia idroelettrica è stata in Italia dal 1920 la seguente:

| | | | |
|---|---|---|---|
| anno | 1920 | Kw-ore | 3.550.000.000 |
| » | 1921 | » | 3.450.000.000 |
| » | 1922 | » | 3.650.000.000 |
| » | 1923 | » | 4.650.000.000 |
| » | 1924 | » | 5.400.000.000 |
| » | 1925 | » | 6.200.000.000 |
| » | 1926 | » | 7.300.000.000 |
| » | 1927 | » | 7.800.000.000 |

Non sono proprio i numeri nel loro valore assoluto che interessano, numeri che forse non sorprendono molto coloro che appartengono a Nazioni che abbiano una vita industriale di più remota origine o che abbiano avuto dalla natura il dono di più ricche energie idrauliche. Ciò che interessa, e su cui non si può sorvolare, è piuttosto il gradiente di questa funzione del tempo, l'energia elettrica prodotta: quasi stazionaria negli anni dal 1920 al 1922, sale negli anni successivi con un incremento medio di oltre 800 milioni di Kw-ore all'anno.

Accostiamo questo rapido accrescimento della nostra efficienza nel campo idroelettrico alla progrediente opera nel campo della bonifica delle terre. E prospettiamo questa condizione di cose senza iattanza, ma colla cosciente modestia di chi sicuramente lavora per il proprio avvenire.

* * *

7. - Avendo l'onore di parlare di bonifiche, anzi di bonifiche in Italia davanti a questo eccezionale e alto uditorio che è il Congresso Matematico Internazionale, penso di potere, e forse anche di dovere far cenno a un argomento che da un lato è di essenziale rilievo tecnico nei progetti di bonifica mentre da altro lato richiede per lo studio la utilizzazione dei procedimenti della analisi matematica.

È di notevole importanza, specie sotto l'aspetto economico, di proporzionare bene le dimensioni dei canali di scolo, affinchè non siano deficienti, al che potrebbero anche conseguire i danni gravissimi di allagamenti di terreni, nè siano esageratamente ampi, al che corrisponderebbe un inutile aumento della spesa, già tanto ingente, per le opere di bonifica.

Le dimensioni dei canali sono di solito determinate tentando la previsione della portata massima che i singoli canali dovranno smaltire, o, ciò che è lo stesso, la previsione della portata massima per unità di area (ettaro) di zona servita dal canale, alla quale portata si dà nome di coefficiente udometrico.

È doveroso, su questo argomento, ricordare i nomi del BOCCI, del BUCCHI, del BRIGHENTI, del VENTURA, del PASINI. Fu ed è molto diffusa in Italia, pel coefficiente udometrico, la formula di DOMENICO TURAZZA pubblicata nel 1879:

(1) $$u = \frac{kHa}{t_0 - t_1},$$

dove $u$ è il coefficiente udometrico,

$t_0$ la durata della pioggia,

$t_1$ il periodo di corrivazione, cioè il tempo che si suppone occorra ad acqua caduta nelle parti più lontane per raggiungere la considerata sezione del canale di scolo,

$H$ l'altezza di pioggia caduta nel tempo $t_0$,

$k$ il rapporto fra la quantità di acqua uscita dalla considerata sezione del canale nel tempo $t_0 + t_1$ e quella caduta per pioggia,

$a$ il rapporto fra la portata di deflusso massimo e la media nel tempo $t_0 + t_1$.

La formula (1) è basata su considerazioni puramente cinematiche; delle quali pure ci si vale per esprimere il periodo di corrivazione $t_1$, per indursi a concentrare l'attenzione sui casi $t_0 = t_1$, per assumere $a = 2$, e scrivere quindi, in luogo della (1):

(2) $$u = \frac{kH}{t_1}.$$

La formula (1) e la sua conseguente (2) riducono in sostanza l'onda di piena nei canali ad elementi, come ho detto, puramente cinematici. Sfugge alle formule (1), (2) un fatto fondamentale che si collega con quello del deflusso nei canali, il riempimento di essi durante la pioggia, cioè l'azione moderatrice che, sull'entità del deflusso, esercita la capacità dei canali.

A tale mancanza di rispondenza fra la realtà fisica e lo schema analitico non si può porre rimedio con ritocchi, per quanto diligenti, ad alcuni degli elementi della formula (1). È vero, sì, che nessun fatto fisico noi possiamo presumere di rappresentare con tutta fedeltà nel breve riassunto di una o di poche formule. Ma noi possiamo però proporci (e in molti casi il proposito è fecondo di risultato) che i processi analitici, per quanto imperfetti, siano, almeno nel loro fondamentale concetto, intonati alla realtà. Ove ciò sia, allora le formule ricavate sono suscettibili di graduali perfezionamenti suggeriti dalla ragione e dall'esperienza. Ove ciò non sia, le formule restano un convenzionale non tranquillizzante mezzo di calcolo.

Lo stesso appunto di visione puramente cinematica dell'onda di piena si deve fare a un metodo grafico che fu sviluppato in Italia dal POGGI e in Germania dal FRÜHLING.

Osservazioni analoghe furono già formulate molti anni or sono, nel 1901, da ETTORE PALADINI, con riguardo non alle bonifiche, ma a una situazione sostanzialmente analoga dal lato idraulico, quella delle fognature cittadine.

Osservava giustamente il PALADINI che lo svolgimento di una piena in una rete di canali di fognatura è da considerarsi, nella sua linea essenziale, ad ogni intervallo di tempo come bilancio fra la quantità di acqua che entra nella rete, quella che ne esce e quella che vi trova recapito nello stesso intervallo di tempo. Il principio è bene assiomatico: l'acqua che entra nella rete dei canali in un dato tempo eguaglia la somma di quella che ne esce e di quella che è trattenuta nei canali nello stesso tempo.

Può sembrare strano che principio tanto intuitivo non abbia trovato applicazione per le reti dei canali di fognature prima del richiamo fatto, come ho detto, nel 1901 dal PALADINI. Ma pure è così.

Nel 1904 GAUDENZIO FANTOLI, sulla base del criterio chiaro ed elementare posto dal PALADINI, sviluppò un processo razionale di calcolo per le reti di fognature.

Ebbene: nonostante l'analogia fisica fra fognature e bonifiche, la regola del coefficiente udometrico per valutazione della portata di piena ha continuato a dominare nel calcolo dei canali di bonifica.

Risale appena a qualche anno fa uno studio che si propone di estendere al caso delle bonifiche il monito che il PALADINI enunciò per le fognature e che ha evidentemente significato per tutte le reti di canali.

Ponendoci su questa base, noi consideriamo come equazione fondamentale quella che esprime il suddetto assiomatico principio:

$$pdt = qdt + dv, \tag{3}$$

dove $p$ è la portata affluente alla rete dei canali fino a una data sezione nel momento $t$,

$q$ la portata defluente dalla considerata sezione pure al momento $t$,

$dv$ l'aumento, nell'intervallo infinitesimo di tempo successivo al momento $t$, del volume di acqua contenuto nei canali tutti fino alla suddetta sezione.

Rilievi sperimentali sui coefficienti di afflusso dell'acqua e sulle intensità delle piogge, considerazioni varie, sia di ordine generale sui canali sia specifiche per le sezioni trapezie dei canali di bonifica, portano a ottenere come risoluzione del problema, in forma integrata, la equazione seguente:

$$t = \frac{3V}{2Q^{\frac{2}{3}}p^{\frac{1}{3}}}\varphi(x), \tag{4}$$

con

$$x = \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{3}},$$

$$\varphi(x) = -\log_e|x-1| + \tfrac{1}{2}\log_e(x^2+x+1) - \sqrt{3}\left(\text{arc tang}\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{6}\right),$$

$V$ volume di acqua contenuto nei canali sino alla data sezione e sino a rispetto del franco di bonifica,

$Q$ portata di deflusso da detta sezione e colla stessa condizione di raggiunta quota di rispetto del franco di bonifica.

Questa equazione, per una data intensità $l$ di pioggia ($l$ è fattore, insieme col coefficiente di afflusso $k$ e coll'area $A$ della zona servita, della portata di afflusso $p=klA$), permette di valutare il tempo occorrente perchè l'acqua nel canale raggiunga il franco di bonifica. Basta perciò, nell'equazione (4), porre $Q$ in luogo del generico $q$, cioè porre $x=\left(\frac{Q}{p}\right)^{\frac{1}{3}}$.

La ricerca va ripetuta per diverse intensità $l_1$, $l_2$, $l_3$.... cui le effemeridi meteorologiche fanno corrispondere diverse durate massime possibili di pioggia $t_1$, $t_2$, $t_3$.... Per ogni intensità si ha dalla formula (4) il valore della rispettiva durata $T_1$, $T_2$, $T_3$.... compatibile col rispetto del franco di bonifica.

Ove risulti, anche per uno solo $T_n$ dei valori $T$, $T_n<t_n$, si concluderà che la rete dei canali sino alla considerata sezione non è in grado di smaltire tutte le possibili pioggie con rispetto del franco di bonifica: la pioggia, infatti, per cui $T_n<t_n$ porti i canali a riempimento fino a quota di rispetto del franco di bonifica prima del termine della pioggia e porta quindi al termine della pioggia le quote d'acqua oltre il limite di rispetto del franco di bonifica.

Ove sia $T_1>t_1$, $T_2>t_2$, $T_3>t_3$...., allora si concluderà per una esuberanza delle sezioni dei canali, che potrà, se le suddette disuguaglianze sono notevoli, consentire una riduzione delle progettate sezioni di scavo con vantaggio economico del lavoro.

È ovvio che il rapporto fra durate possibili e durate compatibili potrà convenire sia fatto anche con riferimento alla situazione di canali pieni sino a completo annullamento dal franco di bonifica. Potrà, infatti, essere consentita, con limitata frequenza, una riduzione del franco di bonifica, mentre mai si potrebbe ammettere l'allagamento dei campi.

Questo metodo di calcolo viene implicitamente a condannare la considerazione di una sola pioggia preventivamente fissata, così come si fa col criterio dal periodo di corrivazione e del coefficiente udometrico. Per giungere a chiara visione del funzionamento della rete, l'esame deve estendersi al complesso delle pioggie di grande intensità verificatesi nel comprensorio durante un lungo periodo di tempo, con accertamento della relazione metrica che passa fra intensità di pioggia e durata e fra intensità di pioggia e estensione della zona considerata.

8. - Questo è, nelle sue linee essenziali, il metodo di calcolo del funzionamento idraulico delle reti di canali di bonifica, studiato e proposto di recente qui in Italia e intonato alla lucida visione dell'eminente idraulico italiano Ettore Paladini: metodo la cui esposizione ho ritenuto si potesse a buon diritto introdurre in questo breve discorso sulle bonifiche in Italia.

Mi si potrebbe però osservare che mi è accaduto, con ciò, *parva componere magnis*. Ma assicuro che non penso affatto di elevare il risultato di studi, per quanto pazienti e coscienziosi, a quel piano stesso dove dobbiamo collocare la sapienza degli uomini di governo, la abilità degli organizzatori, la perseveranza degli agricoltori, la tenacia dei lavoratori. Rendiamo omaggio a queste nobili virtù, che sanno trasformare le lande selvatiche e le febbrili paludi in campi ubertosi e salubri, in regioni ferventi di vita e di industria.

ÉMILE BOREL

# LE CALCUL DES PROBABILITÉS ET LES SCIENCES EXACTES

Le Calcul des probabilités est une branche relativement récente des mathématiques, puisque ses origines remontent seulement au XVIII<sup>e</sup> siècle. C'est à la fin du XVIII<sup>e</sup> siècle que LAPLACE a publié son grand traité des probabilités et c'est seulement au XIX<sup>e</sup> que les applications du calcul des probabilités sont devenues nombreuses et ont pénétré à peu près toutes les branches de la connaissance scientifique.

Je n'ai pas l'intention de faire l'historique de ce développement rapide du Calcul des probabilités au cours du XIX<sup>e</sup> siècle. En même temps que les applications se multipliaient, les principes mêmes de la théorie des probabilités étaient approfondis par les mathématiciens les plus éminents et de nombreux traités étaient consacrés dans tous les pays à l'exposition des principes sur lesquels repose le Calcul des probabilités, et à l'étude de certaines de ses applications.

Parmi ces applications, les plus importantes, au point de vue de la pratique, sont celles qui sont relatives aux assurances de toutes natures et en particulier aux assurances sur la vie. On pourrait mentionner aussi les applications à certaines recherches biologiques, en ce qui concerne particulièrement la sélection des graines de semence, et dans un domaine entièrement différent, les applications au réglage des tirs de l'artillerie. Toutes ces applications concernent des sciences et des théories assez conjecturales, et il a pu paraître naturel que ce soit dans ce domaine que le calcul des probabilités se montre le plus utile.

Cependant, la théorie des erreurs d'observations s'est révélée rapidement indispensable à toutes les sciences qui utilisent des instruments précis de mesure et en particulier à l'astronomie et à la physique. Cette théorie des erreurs est une branche de la théorie générale des probabilités, et a été parfois exposée dans des ouvrages spéciaux d'une manière presque indépendante des théories générales auxquelles elle se rattache.

Quelle que soit l'importance et l'intérêt de ces applications diverses du Caldes probabilités, je n'en parlerai pas plus longuement aujourd'hui, voulant me borner aux applications d'une nature plus théorique et à essayer de préciser quel peut être le rôle du Calcul des probabilités dans les sciences exactes, c'est à dire

dans les mathématiques pures et dans les recherches théoriques de mécanique, d'astronomie et de physique.

Nous laissons donc de côté tout ce qui concerne les applications du Calcul des probabilités à la science expérimentale, pour nous borner à ses applications à la science théorique.

I.

Il semble au premier abord, qu'il y ait contradiction absolue entre la notion de probabilités, et la notion même de sciences exactes. On aurait fort étonné les géomètres grecs en leur faisant entendre que la probabilité peut jouer un rôle dans un domaine où il n'y a place que pour la certitude. Qu'il s'agisse des propriétés géométriques du triangle, des propriétés arithmétiques des nombres entiers et de leurs diviseurs, les théorèmes d'EUCLIDE énoncent des vérités absolues et non pas contingentes: on ne conçoit pas la possibilité d'introduire le hasard dans une série de syllogismes.

Les applications des mathématiques à la mécanique, à l'astronomie, à la physique, présentent le même caractère de certitude objective. Lorsque NEWTON déduit de sa loi de l'attraction universelle les lois de KEPLER sur le mouvement elliptique, il énonce des résultats certains, et non pas des résultats probables. De même, lorsqu'un physicien géomètre calcule les dispositions qu'il faut donner à un système optique centré pour obtenir un certain grossissement, ses calculs ont la rigueur de la géométrie et de l'algèbre et ne laissent pas de place au hasard. L'hypothèse que le calcul des probabilités pouvait jouer un rôle en de telles matières, aurait donc apparu pendant longtemps comme une hypothèse complètement absurde et déraisonnable.

On sait que c'est dans l'étude des propriétés des gaz que le calcul des probabilités s'est pour la première fois introduit dans les sciences exactes. Si l'on imagine un gaz comme formé d'un nombre extrêmement considérable de molécules, il est humainement impossible de calculer et de prévoir le mouvement de toutes ces molécules. On se trouve ainsi conduit à essayer de remplacer ce calcul exact, qui est pratiquement impossible, par un calcul approximatif dans lequel s'introduisent nécessairement des hypothèses de probabilité. Ces conceptions, dont l'origine remonte à BERNOULLI, ont pris un grand développement dans la seconde moitié du XIXe siècle, grâce aux travaux de MAXWELL, de BOLTZMANN et de JEANS. Aujourd'hui, elle sont universellement admises, grâce aux magnifiques travaux expérimentaux de M. JEAN PERRIN qui a pu réaliser à une échelle qui nous est accessible des phénomènes entièrement analogues à ceux qu'avait imaginé le génie des créateurs de la théorie cinétique des gaz.

Les physiciens sont maintenant tous habitués à voir la théorie des probabilités s'introduire dans la plupart des recherches de physique théorique. Les résultats auxquels on se trouve ainsi conduit n'ont pas la rigueur absolue des

démonstrations euclidiennes au sens rigoureusement mathématique du mot: on ne peut pas affirmer, comme le fait observer JEANS, que de l'eau mise sur le feu se mettra à bouillir et ne se transformera pas en glace: on peut seulement affirmer que ce phénomène extrêmement étrange que serait la transformation en glace de l'eau placée sur le feu, est un phénomène extrêmement improbable, mais il est possible de préciser par des exemples à quel point ce phénomène est improbable; si l'on imagine des millions de singes qu'on aurait dressés à taper au hasard sur autant de machines à écrire, il est extrêmement improbable que ces singes reproduisent tous les livres qui sont dans toutes les bibliothèques du monde: cela est extrêmement improbable, mais on ne peut pas dire que cela est rigoureusement impossible, au sens absolu du mot impossible. Les impossibilités qui s'introduisent dans l'énoncé des lois physiques sont de même nature que l'improbabilité de ce miracle des singes dactylographes. Au point de vue mathématique, on doit agir comme si ces probabilités extrêmement voisines de l'unité équivalaient rigoureusement à la certitude.

C'est ainsi que dans de nombreuses théories physiques que nous ne pouvons rappeler toutes, le Calcul des probabilités a conduit à des résultats définitifs et précis, et s'est ainsi révélé comme un auxiliaire indispensable de la physique.

## II.

Il y a tout lieu de croire que les applications théoriques du calcul des probabilités ne se borneront pas à ce résultat dès à présent acquis, mais qu'elles prendront une extension encore plus considérable.

En astronomie stellaire, des recherches extrêmement importantes ont été faites, notamment par M. CHARLIER et par ses élèves, sur l'application de la théorie des probabilités à la distribution des étoiles. Ces recherches ont déjà donné des résultats importants, elles se poursuivent encore et il est désormais impossible de les ignorer dans la discussion des théories cosmogoniques. Il est tout à fait vraisemblable que le développement de l'astronomie stellaire conduira à constater de nombreuses analogies entre les lois des mouvements des étoiles et les lois des mouvements des molécules d'un gaz raréfié. Cette analogie entre l'infiniment petit et l'infiniment grand aurait plu à Pascal.

D'autre part, le développement de la théorie des quanta étend chaque jour le domaine des application de la théorie des probabilitès à la physique théorique; aux statistiques de la théorie cinétique dans lesquelles à côté des théories du discontinu, subsistent encore des vestiges importants des théories du continu, les physiciens modernes tendent à subsistuer de plus en plus des statistiques exclusivement discontinues. Les modifications qu'introduit cette différence de point de vue, sont assez analogues à celles que signalait POINCARÉ lorsqu'il faisait la distinction célèbre entre l'entropie fine et l'entropie grossière.

D'une manière générale, l'introduction de méthodes de statistiques discontinues entraînera peu à peu l'emploi de méthodes plus délicates du Calcul des probabilités. Il ne sera plus possible d'affirmer, comme le faisaient volentiers il y a quelques années certains savants, que le Calcul des probabilités se résume dans la loi de GAUSS, et que tous les développements mis autour de cette loi de GAUSS sont entièrement superflus. La loi de GAUSS suffit, en effet, dans les cas où le discontinu tend à se confondre avec le continu, en raison du nombre extrêmement grand des phénomènes continus, mais elle est insuffisante lorsque l'on a à faire à des phénomènes proprement discontinus.

L'introduction du discontinu dans l'atome lui même, introduction qui pouvait d'ailleurs seule expliquer d'une manière rationnelle la discontinuité des poids atomiques, ouvre un nouveau champ d'application à la théorie des probabilités.

Par là elle s'introduit dans la chimie et c'est elle seule qui permettra de résoudre les problèmes nouveaux et difficiles qui se trouvent posés par l'évolution des théories chimiques; théorie des substances radio-actives, théorie des isotopes, transmutation de la matière, toutes ces questions relèvent de la théorie des probabilités.

L'étude des principes essentiels de la théorie des probabilités est aujourd'hui aussi nécessaire à l'astronome, au physicien, au chimiste, que l'étude des éléments de l'algèbre, de l'analyse et de la géométrie; si l'on tient compte des applications de la théorie des probabilités aux phénomènes de démographie, aux assurances, aux phénomènes biologiques, on doit conclure que les éléments de la théorie des probabilités devraient être enseignés non seulement dans toutes les universités, mais dans la plupart des établissement d'enseignement secondaire.

## III.

Les probabilités peuvent être utilisées, non seulement dans les sciences physiques, mais dans les recherches de mathématiques pures ?

Au premier abord, cela parait difficile, car dans les faits mathématiques entre une certitude qui n'est pas de même nature que la certitude que nous pouvons avoir relativement aux phénomènes physiques. Comme je le rappelais tout à l'heure, les démonstrations de la géométrie et de l'arithmétique ne laissent aucune place au doute, aucune place par conséquent à la probabilité.

Il existe cependant une catégorie importante de faits mathématiques, au sujet desquels il nous sera toujours impossible d'arriver à une certitude, en raison de l'insuffisance des moyens matériels dont nous disposons. Il nous est possible de calculer avec un grand nombre de décimales exactes un nombre tel que le nombre $\pi$ ou le nombre $e$, mais les moyens matériels rendent le calcul effectif d'un millier de décimales extrêmement difficile et il serait tout à fait vain de songer à en calculer plusieurs milliers, à plus forte raison d'en calcu-

ler un million; en admettant même des perfectionnements extraordinaires dans nos techniques, il n'est pas douteux que le calcul des milliards de décimales ne pourra jamais être réellement effectué.

Il en est de même pour ce qui concerne les nombres premiers. On a pu calculer effectivement des tables de nombres premiers qui s'étendent jusqu'à 10 millions. Grâce à ces tables, il est possible à la rigueur d'imaginer que l'on décèle les nombres premiers dans un intervalle assez restreint, choisi arbitrairement à condition que les extrêmités de cet intervalle ne depasse pas le carrè de 10 millions; mais si l'on veut atteindre les nombres premiers de 20 ou 30 chiffres, on ne pourra arriver qu'à des résultats isolés au moyen de méthodes arithmétiques particulières et il ne sera pas possible de connaître tous les nombres premiers compris même dans un petit intervalle.

Dans l'un comme dans l'autre des cas que nous venons de citer, nous sommes amenés à introduire en arithmétique le langage de la probabilité. S'il nous est impossible de savoir quel est le milliardième chiffre décimal du nombre $\pi$, nous sommes autorisés à affirmer qu'il y a une probabilitè égale pour que ce chiffres soit l'un des 10 chiffres de la numération décimale, et par conséquent, que la probabilité pour que ce chiffre soit le chiffre 3 est égale à un dixième. Sans doute, on peut objecter à ce langage, que des hommes organisés comme nous, mais dont la vie serait mille fois plus longue ou un million de fois plus longue, auraient le loisir et la possibilité de faire effectivement les calculs que nous ne pouvons faire, et que par suite ils arriveraient à savoir avec certitude si le chiffre en question est ou non égal à 3, mais nous devons borner nos espoirs à constituer une science humaine et non une science pour des surhommes ou pour des dieux. C'est à ce point de vue humain que le langage de la probabilité est non seulement légitime, mais encore nécessaire.

Il en est de même pour les nombres premiers. Il nous est possible de déterminer assez exactement la fréquence probable des nombres premiers dans un certain intervalle, et nous pouvons par suite introduire au sujet de ces nombres premiers, le langage de la probabilité. Une question qui se posera alors, est celle des écarts possibles entre les frequences moyennes et les fréquences effectives. J'ai donné à ce sujet quelques indications dans une note qui a paru il y a quelques mois dans les Comptes-rendus de l'Académie des Sciences de Paris, et je ne m'y étendrai pas.

Lorsque l'on considère, comme nous venons de le faire, des nombres très grands, mais cependant finis, qu'il s'agisse des nombres premiers ou des décimales du nombre $\pi$, il est à la rigueur possible d'objecter qu'un perfectionnement extraordinaire et imprévu de nos techniques pourrait permettre un jour de résoudre avec une facilité relative des problèmes qui nous apparaissent comme complètement insolubles, mais il n'en est pas de même lorsque l'on considère une suite de nombres entiers qui se prolonge indéfiniment, comme la suite illi-

mitée des decimales de $\pi$, ou comme la suite illimitée des nombres premiers. Il est alors absolutement certain que ces suites illimitées ne seront jamais complètement et entièrement connues, et que par suite, les problèmes arithmétiques que l'on peut se poser à l'égard de telles suites ne pourront trouver leur réponse que dans le langage des probabilités.

Les probabilités qui s'introduisent dans de telles questions, sont en général les probabilités dénombrables, car les problèmes qui se posent sont relatifs à une infinité dénombrable d'évènements, si l'on considère chaque chiffre décimal ou chaque nombre premier comme un évènement. Il en est de même des problèmes qui peuvent être posés au sujet des nombres entiers qui s'introduisent dans les développements en fractions continues des nombres incommensurables.

Il est d'autres questions d'analyse pure et de théorie des fonctions, dans lesquelles le langage des probabilités n'est peut-être pas nécessaire, mais est certainement commode. Si l'on considère dans un intervalle fini un des ensemble auxquels j'avais donné le nom « d'ensembles mesurables » et que M. LEBESGUE a nommés « ensembles mesurables B », il est légitime de dire que la probabilitè pour qu'un point de l'intervalle appartienne à cet ensemble est égal au rapport de la mesure de l'ensemble à la longueur totale de l'intervalle.

Cet énoncé pourrait même être considéré comme la definition la plus simple de la mesure; du moment que la probabilité peut être définie, la mesure se trouvera par là même définie.

Les probabilités relatives aux nombres peuvent être considérées comme des probabilités géométriques, si ces nombres sont représentés géométriquement par des points, ou comme des probabilités dénombrables, si l'on porte au contraire l'attention sur les développements de ces mêmes nombres en fractions décimales ou en fractions continues. La comparaison entre ces deux définitions de la probabilité, est souvent très instructive.

Dans les recherches modernes sur la théorie des fonctions de variables réelles, on est souvent amené à considérer les propriétés qui sont vraies *presque partout*, suivant le langage de M. LEBESGUE, c'est à dire, qui sont vraies sauf peut-être pour les points d'un ensemble de mesure nulle. Dans le langage des probabilités, on se trouve conduit à dire que la probabilité pour que ces propriétés soient vraies en un point choisi au hasard, est égale à l'unitè, mais l'on ne doit pas oublier que dans le domaine des probabilités continues, probabilité égale a l'unité ne doit pas être confondue avec certitude. Il serait plus correct pour cette raison d'employer un langage un peu différent, et de dire que de telles probabilités sont asymptotiques à l'unité.

Les applications du Calcul des probabilités à l'arithmétique et à la théorie des fonctions, n'en sont encore qu'à leur début. Il n'est pas douteux qu'elles se développeront et que le Calcul des probabilités dans ce vaste domaine ne sera

pas seulement un moyen commode d'exposer des résultats acquis, mais sera également une méthode de découvertes extrêmement utile.

IV.

J'espère vous avoir convaincus, par ce rapide exposé, que le rôle du Calcul des probabilités dans les sciences exactes n'est pas moins important que dans les sciences biologiques ou statistiques. Les progrès de la physique moderne, les progrès de la théorie des fonctions, tendent à augmenter chaque jour l'importance de ce rôle; non seulement les phénomènes physiques et chimiques, mais encore tous les phénomènes arithmétiques et analytiques eux-mêmes sont dans la dépendance des probabilités. Cette constatation n'enlève rien, cela va sans dire, à la valeur objective de la science, et il serait vain de penser qu'elle peut influer sur la théorie de la connaissance telle que la comprennent les philosophes. Il ne faudrait point que ce langage de la probabilité amène à des confusions analogues à celles qui ont été produites il y a quelques années, par la théorie de la relativité. C'est par un simple jeu de mots que certains philosophes ont tiré des considerations purement physiques d'EINSTEIN des conséquences philosophiques sur la relativité générale des connaissances humaines. La théorie des probabilités est une branche des sciences mathématiques dans laquelle les raisonnements ne sont pas moins rigoureux, ni les conclusions moins fermes que dans les autres branches des mathématiques, et l'introduction de plus en plus générale des méthodes du Calcul des probabilités dans les sciences exactes ne saurait porter atteinte au caractère d'exactitude et de précision qui appartient à ces sciences.

Lorque l'on est amené à énoncer des résultats avec le langage des probabilités, il faut toujours avoir à l'esprit l'exemple di JEANS, et se dire que l'eau mise sur le feu, ne se transforme jamais en glace.

OSWALD VEBLEN

# DIFFERENTIAL INVARIANTS AND GEOMETRY

The problem of the comparative study of geometries was clearly outlined in a very general form by RIEMANN in his Habilitationschrift in 1854. After explicitly recognizing the possibility of discrete spaces, RIEMANN limited his discourse to continuous manifolds in the sense of Analysis Situs and defined what he meant by such manifolds. This amounted to assuming that the points of any neighborhood can be represented by ordered sets of $n$ coordinates, $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$. He also assumed that his discourse was to use the analytic methods which involve differentials. This implies that we admit to our attention only a class of coordinate systems which are related among themselves by analytic transformations — or at least by transformations equipped with a sufficient number of derivatives. He thus had a sufficient basis for the discussion of any phenomena which could be described by means of coordinates and differentials. But his own work narrowed down to an investigation of the measure of distance and, ultimately, to the theory of quadratic differential forms.

The comparative geometry problem was again formulated in 1872 by KLEIN in his Erlanger Programm. With the same presuppositions as RIEMANN regarding the nature of the underlying manifold, KLEIN asked us to consider a group of transformations (not necessarily point transformations) in this manifold and to regard a geometry as the theory of properties of figures in the manifold which are unaltered by the transformations of this group.

This point of view was the dominant one for the first half century after it was enunciated. It effectively took account of subjects like Projective Geometry which the Riemannian point of view seemed to overlook. It was a helpful guide in actual study and research. Geometers felt that it was a correct general formulation of what they were trying to do. For they were all thinking of space as a locus in which figures were moved about and compared. The nature of this mobility was what distinguished between geometries.

With the advent of Relativity we became conscious that space need not be looked at only as a « locus in which », but that it may have a structure, a field-theory, of its own. This brought to attention precisely those Riemannian geometries about which the Erlanger Programm said nothing, namely those

whose group is the identity. In such spaces there is essentially only one figure, namely the space structure as a whole. It became clear that in some respects the point of view of RIEMANN was more fundamental than that of KLEIN (1).

Nevertheless the hold of the Erlanger Programm upon the imagination of mathematicians is such that attempts were sure to be made to revamp the Programm so as to adapt it to the new order of things. And these attempts have had a considerable degree of success. The concept of infinitesimal parallelism which had been introduced by LEVI-CIVITA was developed and enlarged by WEYL and has been generalized by a number of mathematicians. In particular, CARTAN and SCHOUTEN have shown that there are other ways than those forseen by KLEIN of connecting up the theory of continuous groups with geometry. As CARTAN has said, we may regard a Riemannian space as a non-holonomic Euclidean space, and many of the generalizations of Riemannian spaces can be arrived at in a similar manner.

But while these new relations between group theory and geometry are important and fruitful, each new step in advance makes the whole matter seem more complicated than before. The KLEIN theory of geometry seems to be showing the same symptoms as a physical theory whose heyday is past. More and more complicated devices have to be introduced in order to fit it to the facts of nature. Its fate, I should expect, will be the same as that of a physical theory — it becomes classical and its limitations as well as its merits are recognized.

Once we have recognized that there are geometries which are not invariant theories of groups in the simple sense which we had in mind at first, we are on the way to recognize that a space may be characterized in many other ways than by means of a group. For example, there is the fundamental class of *spaces of paths* studied by EISENHART and some of my other colleagues, which are

(1) It should be remarked in passing (partly because this point has been commented on by SCHOUTEN, *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, Vol. 50 (1926) and CARTAN, *L'Enseignement Mathématique*, 26e Année (1927) p. 203) that the way in which the Riemannian geometries fit most naturally into the Erlanger Programm is to take as the manifold the set of points $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ and instead of the group (for it is not, strictly speaking, a group) the set of all analytic transformations *regarded as point transformations*, not as transformations of coordinates. The Riemannian spaces (or the quadratic differential forms) fall into classes of those which are equivalent under these transformations. From this point of view the theory of all Riemannian geometries is a single geometry. There is just one space and in it the various Riemannian spaces are particular figures. This way of looking at the matter is precisely analogous to the way in which Klein himself brought the theory of contact transformations into the Programm as a geometry. It is helpful in connection with the equivalence problem, but it is not a way of characterizing a particular Riemannian space by means of its group. And it was just this sort of a characterization of a projective, an affine, a Euclidean, a non-Euclidean space, that was the significant thing about the Erlanger Programm.

characterized by the presence of a system of curves such that each pair of points is joined by one and only one curve of the system. Whether or not these spaces can be characterized in other ways there can be no doubt of the significance of this way of viewing them.

If we give up the idea of making any one concept — such as the group concept — dominant in geometry, we naturally return to something like the starting point of Riemann's discussion. That is to say, we prescribe only the continuous nature of the manifold to be considered and the analytic character of the operations. There has indeed been an uninterrupted development of the Riemannian geometries along these, so to speak, unprejudiced lines. I mean the work of LIPSCHITZ, CHRISTOFFEL, RICCI and, more recently, the mathematical physicists. This work seemed to most mathematicians to be extremely formal and narrow in outlook. But it was continually developing the ideas of differential invariant theory. The definitions and terminology were at first modelled as nearly as possible on those current in algebraic invariant theory, but the growth of the subject, particularly since the applications to relativity have emphasized the importance of the systematic methods of RICCI, has led to a conception of a differential invariant which is well suited to the comparative study of geometries.

Such an invariant is an abstract object which has in each coordinate system a unique set of *components*, each component being a function of the coordinates and their differentials ([1]). For example a quadratic differential form is an invariant which has a single component in each coordinate system, this component being a function which is a homogeneous polynomial of degree two in the differentials and an analytic function of the coordinates. The theory of one or more such invariants is what we call a geometry.

In some cases the geometries at which we arrive by this definition will be geometries in the sense of the Erlanger Programm or one of its generalizations, and in some cases they will not. I do not regard this definition of the term geometry as anything definitive, because I regard any attempt to make a sharp definition of such a term as savoring of pedantry. I would rather say that a theory is a geometry when it is sufficiently like the classical geometry to deserve this name — and let it go at that.

Moreover the family of transformations of coordinates which underlies the definition of a differential invariant is not the only one we should consider. There are other transformations of the frame of reference, such as contact transformations, which have a right to consideration. But the definition of a differential invariant which we have adopted is sufficiently general so that with whatever descriptive idea of a space you may choose to begin, you are likely

([1]) This conception of a differential invariant is discussed at greater length in Chap. II of my recent Cambridge Tract, *Invariants of Quadratic Differential Forms*, Cambridge, 1927.

to find in working it out that you must come to grips with the theory of a particular differential invariant.

Let us consider some of the differential invariants which go with the classical geometry. First of all there is a quadratic differential form. In each coordinate system this invariant has one component, namely a function

$$g_{ij}\, dx^i\, dx^j \tag{1}$$

of the coordinates and their differentials. If there is a coordinate system in which the component is simply the sum of the squares of the differentials, the differential form is said to be Euclidean. In the neighborhood of any point this differential form determines a unique Euclidean space, but it also determines a unit of length. So it is not quite accurate to say that the Euclidean geometry is the theory of this quadratic differential form. The Euclidean space and the unit of length together determine a unique quadratic differential form. The Euclidean space by itself determines an infinite class of differential forms such that in each coordinate system they have components,

$$\sigma\, g_{ij}\, dx^i\, dx^j, \tag{2}$$

one for each choice of the function $\sigma$ of the coordinates.

In each coordinate system we may choose a unique one of the components (2) by the requirement that the determinant of the $n^2$ quantities $\sigma\, g_{ij}$ shall be equal to unity. This detemines for each coordinate system a unique function

$$G_{ij}\, dx^i\, dx^j$$

and therefore another invariant which has this function as its component in each coordinate system. This invariant is *a relative quadratic form of weight* $-2/n$. Its components in any two coordinate systems $x$ and $\bar{x}$ are related by the formula

$$\bar{G}_{ij}\, d\bar{x}^i\, d\bar{x}^j = \left| \frac{\partial x}{\partial \bar{x}} \right|^{-2/n} G_{ij}\, dx^i\, dx^j. \tag{3}$$

The Euclidean geometry uniquely determines this invariant, but it would not be correct to say that the Euclidean geometry is the theory of this invariant. For, as was first remarked by T. Y. THOMAS (1), the theory of a relative quadratic form of weight $-2/n$ is conformal geometry. In the case before us the Euclidean conformal group is the group of all transformations between coordinate systems in which the component of our relative differential form is the sum of the squares of the differentials. The Euclidean group (of similarity transformations) is the subgroup of linear transformations of this group. In other words, we cannot have Euclidean geometry until we distinguish between circles and straight lines.

---

(1) *Proceedings of the National Academy of Sciences*, Vol. 11 (1925) p. 722.

The differential equations of the straight lines are

$$\frac{d^2x^i}{dt^2}=0 \tag{4}$$

in cartesian coordinates and

$$\frac{d^2x^i}{dt^2}+\Gamma^i_{jk}\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt}=0 \tag{5}$$

in arbitrary coordinates. In each coordinate system there is one and only one set of funtions $\Gamma^i_{jk}$ and the sets of functions in any two coordinate systems are connected by a simple law of transformation. The functions $\Gamma$ are terefore the components of an invariant, which is called *an affine connection*, the theory of this invariant being *affine geometry*. If the components of an affine connection vanish identically in one coordinate systems, they vanish identically in all coordinate systems related to this one by linear transformations.

The Euclidean geometry may now be characterized exactly as the simultaneous theory of a particular relative quadratic form of weight $-2/n$ and a particular affine connection. There must be a coordinate system in which the components of affine connection are all zero. The Euclidean geometry is what is common to this conformal, and this affine, geometry.

A geometer cannot help remarking at this point that we may replace affine by projective geometry in the above statement. Projective geometry is the theory of the straight lines free from some of the restrictions imposed by the affine treatment. One of these restrictions is that the differential equations (4) imply a particular assignment of the parameter $t$ to the points of the line ([1]). If the parameter is to be assigned arbitrarily, the differential equations become

$$\frac{d^2x^i}{dt^2}\bigg/\frac{dx^i}{dt}=\varphi\left(x,\frac{dx}{dt}\right), \tag{5}$$

where $\varphi$ is an arbitrary function, homogeneous of degree one in the quantities $dx^i/dt$. This amounts to changing the components of affine connection from $\Gamma^i_{jk}$ into

$$\Gamma^i_{jk}+\delta^i_j\,\varphi_k+\delta^i_k\,\varphi_j$$

where $\varphi_j$ is homogeneous of degree zero in $dx^i/dt$. None of these changes affect the quantities

$$\Pi^i_{jk}=\Gamma^i_{jk}-\frac{1}{n+1}\left(\Gamma^a_{aj}\,\delta^i_k+\Gamma^a_{ak}\,\delta^i_j\right),$$

which are thus uniquely determined by the system of straight lines. These quan-

---

([1]) The question of the parametrization of systems of paths is very clearly discussed by J. DOUGLAS, *Annals of Math.*, Vol. 29 (1928) p. 143.

tities [1] are the components of an invariant, which may be called a *projective connection*, with a law of transformation which is somewhat more complicated than that of an affine connection. If the components of a projective connection vanish identically in one coordinate system, they vanish identically in all coordinate systems related to this one by linear fractional tranformations. The classical projective geometry is the theory of a projective connection for which there exists a coordinate system in which its components are identically zero.

Beside the affine and the projective connections we must place another invariant called the *conformal connection* [2], whose components can be given in terms of the conformal relative tensor, $G_{ij}$, by the formula for Christoffel symbols of the second kind. If its components are identically zero in one coordinate system they are identically zero in all coordinate systems related to this one by a set of transformations [3] which contains the conformal group as sub-group and, indeed, is related to the conformal group in much the same way that the affine group is related to the Euclidean group.

I have now mentioned five invariants connected in an intimate way with the Euclidean geometry, (1) an absolute quadratic differential form, (2) a relative quadratic differential form of weight $-2/n$, (3) an affine connection, (4) a projective connection, (5) a conformal connection. Each of these invariants is specialized in an obvious way: the first two so that in some coordinate system their components are sums of squares of the differentials, the last three so that all their components shall be zero in some coordinate system.

In each case, if we drop the restriction imposed by its application to the Euclidean geometry, we obtain a class of invariants each of which has a theory which is a geometry in the generalized sense. In the first case we obtain the

---

(1) These quantities were introduced by T. Y. Thomas, *Proc. Nat. Ac. of Sc.*, Vol. 11 (1925) p. 199. Their law of transformation is

$$\overline{\Pi}^i_{jk} = \Pi^a_{bc} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^a} \frac{\partial x^b}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial x^c}{\partial \bar{x}^k} + \frac{\partial^2 x^a}{\partial \bar{x}^j \partial \bar{x}^k} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^a} - \frac{1}{n+1} \left( \delta^i_j \frac{\partial \log \left| \frac{\partial x}{\partial \bar{x}} \right|}{\partial \bar{x}^k} + \delta^i_k \frac{\partial \log \left| \frac{\partial x}{\partial \bar{x}} \right|}{\partial \bar{x}^j} \right).$$

(2) The conformal connection was introduced by J. M. Thomas, *Proc. Nat. Ac. of Sc.*, Vol. 11 (1925) p. 257. It has the law of transformation,

$$\overline{K}^i_{jk} = K^a_{bc} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^a} \frac{\partial x^b}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial x^c}{\partial \bar{x}^k} + \frac{\partial^2 x^a}{\partial \bar{x}^j \partial \bar{x}^k} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^a} - \frac{1}{n} \left( \delta^i_j \frac{\partial \log \left| \frac{\partial x}{\partial \bar{x}} \right|}{\partial \bar{x}^k} + \delta^i_k \frac{\partial \log \left| \frac{\partial x}{\partial \bar{x}} \right|}{\partial \bar{x}^j} - \bar{G}_{jk} \bar{G}^{ip} \frac{\partial \log \left| \frac{\partial x}{\partial \bar{x}} \right|}{\partial \bar{x}^p} \right).$$

The formula for its components in terms of the *G's* is due to T. Y. Thomas.

(3) *Note added 3 May, 1929*: In the paper refened to in the last footnote below, I called this set the enlarged conformal gronp. But as Professor Weyl has comteonaly pointed ont, it is not a gronp and my argument did not actually essume that it wasone.

Riemannian geometries, in the second and fifth cases the generalized conformal geometries, in the third case the generalized affine geometries, in the fourth case the generalized projective geometries.

These are some, but by no means all, of the geometries that arise by the process which we are considering, namely, to find a differential invariant which is significant for an aspect of elementary geometry and then to remove the restrictions which tie this invariant to the elementary geometry.

It would be interesting to compare these geometries with those studied by CARTAN, SCHOUTEN, and others. But this would hardly be possible in a short address, and besides it would involve questions of interpretation about which I am not perfectly sure. In any case, my point is merely that the differential invariant approach to these geometries is a significant one, not that it is a unique or a dominant one.

It has among other merits that of determining a straight-forward method of working out each geometry in detail. We know how this has been done in the affine case. The first step is to determine a suitable class of invariants in terms of which to state the properties of particular affine geometries. These invariants are the tensors. They have a law of transformation characterized by an isomorphism between the totality of analytic transformations at any point and the group of linear homogeneous transformations,

$$X^i = u^i_j X^j,$$

which we have already seen to be associated intimately with an affine connection. The isomorphism is determined by the equations,

$$\text{(A)} \qquad u^i_j = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j}.$$

The second step is to find a tensor, the curvature tensor, which is an invariant of the basic invariant, and the third step to find a recursive process (such as covariant differentiation or the process of forming extensions by the method of normal coordinates) for generating a complete sequence of tensor invariants of the basic invariant.

These steps can all be paralleled in the projective and the conformal cases. In the projective case we first discover a unique process of associating a linear fractional transformation

$$X^i = \frac{u^i_j X^j}{1 + u^0_j X^j}$$

at each point with each analytic transformation. This amounts to defining the quantities $u^\alpha_\beta$ by the equations (A) and

$$\text{(B)} \qquad u^0_i = \frac{\partial \log u}{\partial \bar{x}^i}, \qquad u = \left| \frac{\partial x}{\partial \bar{x}} \right|.$$

The $(n+1)$-rowed square matrices of the coefficients $u^\alpha_\beta$ of these transformations can be used in exactly the same way as the $n$-rowed matrices $u^i_j$ of (A) to define invariants with linear laws of transformation. The invariants thus defined are formally analogous to the classical affine tensors, and so may be called *projective tensors* (1). A projective tensor has $(n+1)^k$ components in each coordinate system, instead of $n^k$. The next step is to find a process of projective differentiation analogous to covariant differentiation which gives rise to an infinite sequence of projective tensors. In this process we use an invariant called the *extended projective connection* with $(n+1)^3$ components which is in a simple relationship with the original projective connection. By a suitable elimination between the law of transformations of this invariant and that of the derivatives of the components of a projective tensor we find a formula which leads from any given projective tensor to another projective tensor with one more covariant index. This is the process of projective differentation. Since it can be repeated indefinitely, it leads from any projective tensor to an infinite sequence of projective tensors.

By forming the integrability conditions of the law of transformation of the extended projective connection we obtain a projective tensor analogous to the curvature tensor. Its components include those of the curvature tensor for projective geometry discovered by WEYL (2). With this tensor and the recursive projective differentiation process we have a method of getting a complete set of invariants for generalized projective geometry in a form that is accessible to analysis.

In conformal geometry also an analogous theory can be developed. The conformal connection determines a special set of transformations just as the affine and projective connections determine the affine and projective groups respectively, and an isomorphism between this set and the totality of transformations of coordinates determines a class of invariants with $(n+2)^k$ components. These are the *conformal tensors*. There is also an extended conformal connection and conformal differentiation. In this case the extended conformal connection has $(n+2)^2(n+1)$ components, and in order to complete the conformal differentiation process we have to determine some of the components of the conformal derivative by imposing a further invariant condition,

$$G_{\alpha\beta}\, T^\alpha\, T^\beta = 0$$

for example. As in the projective case we arrive at formulas which include and

(1) The projective tensors were introduced by T. Y. THOMAS, *Math. Zeitschrift*, Vol. 25 (1926) p. 723, and also have been used implicitly by the writers on Five-dimensional Relativity, cf. O. KLEIN, *Zeitschrift für Physik*, Vol. 46 (1927) p. 188. For the developments referred to in the text, cf. VEBLEN, *Proc. Nat. Ac. of Sc.* Vol. 14 (1928) p. 154.

(2) H. WEYL, Göttinger Nachrichten, 1921, p. 99.

clarify those obtained by the geometers who have been studying the question from the point of view of infinitesimal displacements. But there is no time in a short address like this to give details. I must refer you to the papers in which some of them have been worked out (1).

The main point which I wish to make is that there is still vitality in the generalized Riemannian view of geometry, and that there are invariants, as yet but little known, which have simple laws of transformation and applications to geometry of a quite elementary type.

---

(1) On the conformal geometry see my paper in *Proc. Nat. Ac. of Sc.*, Vol. 14 (1928) p. 735, and the earlier papers by T. Y. Thomas and J. M. Thomas which are cited there.

GUIDO CASTELNUOVO

# LA GEOMETRIA ALGEBRICA E LA SCUOLA ITALIANA

Nello sviluppo delle scienze i periodi di intenso lavoro, ove lo sguardo è rivolto all'avvenire, e del passato interessa principalmente quel che giova alla ricerca quotidiana, si alternano con periodi di revisione e di assestamento. Molti rami delle matematiche, dopo la produzione esuberante del secolo scorso, attraversano quest'ultima fase; è l'epoca dei trattati o della enciclopedia, come soleva dire un maestro che abbiamo recentemente perduto, FELICE KLEIN, alludendo all'opera che ha occupato gli ultimi anni della sua instancabile attività. La geometria algebrica non sfugge alla sorte comune. Conviene perciò riguardare il cammino percorso nell'ultimo cinquantennio, non per una sterile contemplazione, ma per prendere norma e lena in vista di indagini future.

Quali sono le correnti di pensiero che hanno via via guidato lo studio degli enti algebrici? Quali i principali risultati raggiunti? Quali i problemi fondamentali che ancora si impongono? Quali gli uomini che hanno dato il primo impulso o diretto questo movimento scientifico? Se nel rispondere a qualcuna di tali domande avrò riguardo specialmente all'opera della scuola italiana, non lascierò in ombra la influenza cospicua che i grandi matematici stranieri hanno esercitato su di noi. Per brevità, dovrò limitarmi ad un solo capitolo della geometria algebrica, ove una tradizione ininterrotta da oltre un cinquantennio va ponendo i problemi ed affinando i mezzi per risolverli.

Non risalgo alle origini della geometria algebrica; parto dal tempo in cui visse e fiorì LUIGI CREMONA, il fondatore della nostra scuola. Per spiegarsi l'azione che ebbe quest'uomo eccezionale, per comprendere come egli, in un paese dove era scarsamente nota l'opera delle fiorenti scuole francesi e tedesche, sia riuscito a destar l'entusiasmo dei giovani meglio dotati e a suscitare un insolito fervore di ricerche, non basta la lettura degli scritti di lui: occorre averlo conosciuto, aver provato il fascino che emanava dalla sua potente personalità. Una volontà indomabile che si esercitava prima su se stesso e poi sugli altri, la parola austera, parca negli elogi, tanto più preziosi in conseguenza, e quella felice unione di acume scientifico e di gusto artistico che colpiva il nostro spirito latino. Il CREMONA, ispiratosi alle opere maggiori dei geometri di Francia, Germania e

Inghilterra, ha portato alla perfezione lo strumento di indagine di cui questi avevano già dimostrato il valore. Lo strumento era l'algebra classica, ma così felicemente guidata dall'intuizione geometrica da sembrar quasi trasfigurata, l'algebra di cui non apparisce lo sviluppo algoritmico, bensì il contenuto qualitativo, o numerativo, che interpretato abilmente conduce in modo semplice e sorprendente a risultati fondamentali e riposti.

Non posso qui parlare dei maggiori scritti di lui, apparsi nel decennio che va dal 1860 al 70. Ma devo rilevare che il suo interesse è sempre rivolto alle proprietà proiettive. Anche dove, con la scoperta delle trasformazioni che portano il suo nome, o con la rappresentazione piana della superficie cubica e di altre superficie, egli ha preparato metodi e argomenti per ricerche future, di quei metodi si vale per trasportare dall'uno all'altro ente proprietà proiettive.

Nello stesso ordine di idee si muovono i discepoli che egli predilesse. Occorre in Italia arrivare ad una ricerca fatta dal Bertini nel 1877 per trovar traccia di una classificazione, ove son riguardati come equivalenti forme geometriche (si tratta di involuzioni piane) riconducibili l'una all'altra mediante trasformazioni birazionali. Ma il Bertini, pronto allora come oggi, nella sua florida vecchiezza, ad accogliere ogni nuovo indirizzo geometrico, aveva subìto anche l'influenza di Max Noether che, come poi dirò, ebbe tanto peso nello sviluppo della nostra scuola.

La scuola era in quel momento dominata dalla corrente proiettiva così fortemente da non sentire tutta l'importanza dei problemi che il geometra tedesco aveva posto e in parte risolto. Era necessario che quei problemi li ritrovassimo noi stessi sotto una forma più adatta alla nostra mentalità. A ciò pervenimmo seguendo una via che parve agli altri e sembra oggi anche a noi indiretta, ma che per noi rappresentava in quel momento la via del minimo sforzo. Una corrente di pensiero diversa dalla cremoniana e che, attraverso il Klein, si propagò nel nostro paese fra il 1880 e il 90, portò ad estendere la geometria proiettiva agli iperspazi. Giuseppe Veronese e Corrado Segre furono i maggiori rappresentanti di questo indirizzo. Specialmente il Segre, spirito eclettico, maestro insuperabile, rapito precocemente al nostro affetto e alla nostra ammirazione, vide le applicazioni che della geometria iperspaziale potevano farsi alla teoria delle curve algebriche. Sviluppando una idea già adombrata dal Klein e dal Noether, egli traduce le proprietà di una curva invarianti per trasformazioni birazionali in proprietà proiettive di un opportuno modello della curva, e trasporta così questioni per lui nuove nel terreno più familiare della geometria proiettiva iperspaziale. Questo procedimento ha permesso a lui e ai suoi discepoli di ricostruire in modo originale la teoria che Brill e Noether avevano esposta in una classica memoria, e di ampliarla in varie direzioni.

È noto come questa teoria, che porta un nuovo alito di vita nel campo della geometria algebrica, risalga ad uno dei maggiori geni matematici del secolo scorso, a Bernardo Riemann, la cui gigantesca figura appare tanto più imponente, quanto

più ci allontaniamo dal tempo in cui egli visse. Il RIEMANN, come applicazione degli integrali abeliani da lui studiati, getta le basi di una teoria che trova il suo posto più adatto nell'algebra. Le funzioni razionali di una variabile, o del piano di ARGAND-GAUSS, conducono, come naturale estensione, alle funzioni razionali di due variabili legate da una equazione algebrica, o funzioni razionali sopra una superficie di RIEMANN, o sopra una curva algebrica. Il RIEMANN insegna a costruire una tal funzione quando ne siano noti i poli, e a contare il numero delle costanti arbitrarie da cui dipende. BRILL e NOETHER, stabilendo questi risultati colle sole risorse dell'algebra, altri ne aggiungono, e fondano così la geometria delle proprietà invarianti rispetto alle trasformazioni birazionali che mutano la curva sostegno in un'altra. Operando sopra una funzione razionale ed un opportuno covariante di questa si arriva a costruire, come più tardi indicò l'ENRIQUES, una funzione razionale invariante, che non dipende dalla funzione di partenza, e che caratterizza in un certo modo, a meno di una trasformazione birazionale, la curva o la superficie di RIEMANN su cui si opera; è la funzione o, in linguaggio geometrico, la serie canonica che BRILL e NOETHER hanno introdotto per altra via, ma che già si era presentata a RIEMANN attraverso ai differenziali abeliani di prima specie.

Intorno al 1890 questa teoria, esaminata sotto molteplici aspetti, trascendente, algebrico e geometrico, era già compiuta e si presentava come una delle più perfette dell'algebra geometrica. Si imponeva allora il problema di estenderla alle funzioni razionali di tre variabili legate da una equazione algebrica, per costruire, la geometria sopra una superficie algebrica. Anche di questa il NOETHER aveva gettato le basi, ma, non ostante l'acume e l'intuito del grande geometra, molte ombre ancora sussistevano e solo le linee generali dell'edifizio erano tracciate.

Su tale problema, che poteva ascriversi all'eredità di RIEMANN, l'ENRIQUES ed io mettemmo alla prova verso il 1893 i metodi algebrico-geometrici che il CREMONA, in vista di altri scopi, aveva affinato. I concetti di funzioni razionali dell'ente, di operazioni razionali su di esse, di funzioni covarianti od invarianti potevano, sia pure con qualche cautela, trasportarsi dalle curve alle superficie, conducendo allo studio dei sistemi lineari di curve tracciate sopra una superficie. Ma appena si voleva approfondire la ricerca, quell'analogia, che nei primi passi ci aveva servito di guida, veniva meno e rischiava di condurci ad affermazioni erronee. Permettete che io entri in maggiori particolari sopra una di queste difficoltà, che mise a dura prova allora i nostri metodi e che, più tardi, superata, fece compiere uno dei maggiori progressi alla teoria.

Ricordo che il genere di una curva piana di ordine $n$ dotata di punti doppi può definirsi come il numero delle curve d'ordine $n-3$ linearmente indipendenti che passano semplicemente per quei punti doppi; d'altra parte il numero stesso può calcolarsi subito, anche senza conoscere la curva, appena ne sia dato l'ordine e il numero dei punti doppi, giacchè si dimostra che le condizioni imposte da questi

sono indipendenti, ciò che non è evidente a priori. Si hanno così due definizioni equivalenti del genere di una curva. Ora se si cerca di estenderle ad una superficie, si perviene ancora a due caratteri invarianti, ma essi possono differire tra loro: uno è il genere geometrico introdotto da CLEBSCH, l'altro il genere aritmetico incontrato da CAYLEY, ZEUTHEN e NOETHER. A dire il vero, il solo caso di divergenza tra i due generi, che fosse noto nei primi tempi, riguardava le rigate irrazionali e le superficie trasformabili in rigate. Ma fin dalle prime nostre ricerche riuscimmo a costruire molti altri tipi di superficie irregolari, aventi cioè i due generi diversi. Si trattava di caratterizzare questa classe di superficie e di rendersi ragione dell'anomalia che in esse si riscontra.

Val forse la pena di accennare qual'era il metodo di lavoro che seguivamo allora per rintracciare la via nell'oscurità in cui ci trovavamo. Avevamo costruito, in senso astratto s'intende, un gran numero di modelli di superficie del nostro spazio o di spazi superiori; e questi modelli avevamo distribuito, per dir così, in due vetrine. Una conteneva le superficie regolari per le quali tutto procedeva come nel migliore dei mondi possibili; l'analogia permetteva di trasportare ad esse le proprietà più salienti delle curve piane. Ma quando cercavamo di verificare queste proprietà sulle superficie dell'altra vetrina, le irregolari, cominciavano i guai, e si presentavano eccezioni di ogni specie. Alla fine lo studio assiduo dei nostri modelli ci aveva condotto a divinare alcune proprietà che dovevano sussistere, con modificazioni opportune, per le superficie di ambedue le vetrine; mettevamo poi a cimento queste proprietà colla costruzione di nuovi modelli. Se resistevano alla prova, ne cercavamo, ultima fase, la giustificazione logica. Col detto procedimento, che assomiglia a quello tenuto nelle scienze sperimentali, siamo riusciti a stabilire alcuni caratteri distintivi tra le due famiglie di superficie. Basterà qui citarne uno solo: mentre sopra una superficie regolare ogni sistema continuo di curve algebriche è contenuto in un sistema lineare di curve dello stesso ordine, ciò non avviene per le superficie irregolari, le quali posseggono sempre sistemi continui non appartenenti a sistemi lineari.

Ora, mentre noi proseguivamo le ricerche nominate per la via algebrica-geometrica, un sommo matematico francese, EMILIO PICARD, cercava di trasportare alle superficie la teoria degli integrali abeliani delle curve che RIEMANN aveva condotto alla perfezione. Anche qui le apparenti analogie nascondevano profonde differenze, che le acute indagini dello scienziato francese riuscivano a mettere in luce. La estensione dalle curve alle superficie può farsi secondo due linee diverse. Infatti, accanto agli integrali doppi a differenziale algebrico i quali, sotto condizioni opportune, avevano fornito il mezzo a CLEBSCH e NOETHER di definire per via trascendente il genere geometrico, si presentano gli integrali semplici di differenziale totale algebrico. Le superficie meglio conosciute (salvo le rigate) non posseggono, a dir vero, integrali semplici che rimangano dovunque finiti, od abbiano solo singolarità di tipo polare. Ma il PICARD, anzichè abban-

donare una indagine che poteva solo concernere enti particolari, si propose fin dal 1884 lo studio di quelle superficie che ammettono integrali semplici del tipo indicato. La prosecuzione della ricerca, alla quale anche GIORGIO HUMBERT portò notevoli contributi, rivelò proprietà di queste superficie che coincidevano con quelle spettanti alle nostre superficie irregolari. Così già nel 1894 avevo formulato, in un mio lavoro, la presunzione che le due famiglie di superficie coincidessero. Ma la giustificazione di questa veduta e la determinazione quantitativa del legame fra l'una e l'altra famiglia dovevano richiedere ancora un decennio di ricerche da parte della scuola italiana e francese. L'ultima fase svoltasi fra il 1904 e il 1905, nella quale anche il SEVERI ebbe una parte essenziale, condusse ad un risultato che nel modo più semplice e perspicuo chiudeva un lungo periodo d'indagini. La *irregolarità* di una superficie, cioè la differenza fra i generi geometrico ed aritmetico, uguaglia il numero degli integrali semplici di prima specie linearmente distinti che la superficie possiede; il doppio della irregolarità dà il numero dei periodi dei detti integrali, o il numero degli integrali distinti di seconda specie, od anche il numero dei cicli indipendenti ad una dimensione che si possono tracciare sulla varietà di RIEMANN a quattro dimensioni, la quale coi suoi punti reali rappresenta i punti complessi della superficie. Sotto questo aspetto la irregolarità di una superficie appare come la naturale estensione del genere di una curva, mentre sino allora si era ritenuto che al detto genere corrispondesse nel modo più stretto il genere geometrico di una superficie. Sopra la detta analogia avrò ancora occasione di ritornare.

In quello stesso anno 1905, che tanta luce ha portato nelle questioni di cui vi ho discorso, un altro fondamentale legame veniva scoperto fra la teoria trascendente e l'algebrica. Quattro anni prima il PICARD, studiando gli integrali semplici di terza specie, a differenziale algebrico, aveva dimostrato che il numero delle curve algebriche della superficie lungo le quali l'integrale presenta singolarità logaritmiche non può scendere al disotto di un certo limite dipendente esclusivamente dalla superficie. Precisamente, esiste un intero positivo $\varrho$ tale che, mentre vi è sempre un integrale semplice di terza specie il quale abbia le sue singolarità logaritmiche su $\varrho + 1$ curve fissate comunque, lo stesso fatto non sussiste più quanto si disponga soltanto di $\varrho$ curve generiche. Il numero $\varrho$ è evidentemente un carattere invariante della superficie di fronte alle trasformazioni birazionali che mutano senza eccezione punti semplici in punti semplici. Quale ne sarà il significato algebrico? La risposta esauriente fu data dal SEVERI.

Egli ha potuto dimostrare che la condizione necessaria e sufficiente affinchè un gruppo di curve algebriche di una superficie contenga complessivamente tutte le singolarità logaritmiche di un integrale semplice di terza specie è che le curve del gruppo siano algebricamente legate; con ciò si intende affermare che una curva composta di una parte delle curve del gruppo ripetute ciascuna, se occorre, più volte, ed un'altra curva composta di multipli delle curve rima-

nenti del gruppo, appartengono ad uno stesso sistema continuo di curve algebriche. Di qua il SEVERI deduce l'esistenza di una *base* per le curve algebriche della superficie, cioè di un massimo numero di curve non algebricamente legate, tali però che ogni altra curva sia algebricamente legata a quelle. Il numero delle curve costituenti la base è precisamente l'invariante $\varrho$ di PICARD.

Questi bei risultati, che stabiliscono stretti rapporti fra la teoria algebrica dei sistemi di curve sopra una superficie, la teoria trascendente degli integrali di differenziale totale e le questioni aritmetiche sollevate dall'esistenza di una base, hanno attratto l'attenzione di un matematico insigne, ENRICO POINCARÉ, il quale in uno dei suoi ultimi lavori volle lasciare anche in questo campo la traccia indelebile del suo ingegno universale. Per costruire una curva sulla superficie, egli parte da un gruppo di punti, che egli determina sopra una sezione piana della superficie mediante il teorema di inversione di JACOBI, poi fa ruotare il piano intorno ad una sua retta; qual'è la condizione che quel gruppo descriva una curva algebrica? Dalle formule che rispondono alla domanda il POINCARÉ ricava i principali risultati di cui abbiamo discorso, gettando su di essi nuova luce.

L'interesse di questa Memoria del POINCARÉ sta anche in ciò che essa, insieme ai fondamentali lavori dello stesso autore sulla *Analysis situs*, ha ispirato le ricerche più recenti sulle superficie algebriche. Non furono queste compiute nè in Italia nè in Francia, ma si riattaccano strettamente ai risultati delle due scuole. Esse sono dovute ad un valoroso geometra di origine russa, ora professore all'Università americana di Princeton, il LEFSCHETZ. Egli si è proposto di indagare fino a qual punto, con solo considerazioni topologiche, si possa procedere nello studio delle superficie algebriche. Se, come era da attendersi, in varie questioni la topologia deve chiedere il concorso della teoria degli integrali già nominati, il tentativo è degno di tutto l'interesse e suscita, accanto ai risultati raggiunti, una serie di domande che attendono risposta, sulle quali vorrei ora richiamare la vostra attenzione.

Conviene qui ricordare che nello studio delle funzioni algebriche di una variabile complessa le superficie di RIEMANN hanno un duplice ufficio, o si presentano sotto due aspetti diversi, che non sempre vengono nettamente distinti. Vi è anzitutto l'aspetto locale, o, come potrebbe dirsi, analitico; la superficie di RIEMANN è una riunione di pezzi, ciascuno dei quali rappresenta, in tutto o in parte, il piano della variabile complessa. Per uno scopo siffatto serve specialmente la superficie composta di più fogli piani o sferici collegati attraverso i punti di diramazione, conforme all'idea primitiva di RIEMANN.

Ma secondo un altro aspetto, la superficie viene adoperata esclusivamente in vista delle sue proprietà topologiche, allo scopo di classificare i diversi circuiti che su di essa possono tracciarsi. Alla superficie primitiva di RIEMANN può allora sostituirsi ogni superficie che sia in corrispondenza biunivoca e continua

con quella, che sia omeomorfa ad essa. Per questo secondo scopo serve meglio uno di quei modelli, come ad es. il doppio disco a più buchi, che ALBERTO TONELLI ha per primo indicato, che il CLIFFORD ha ritrovato e il KLEIN ha messo in maggior rilievo.

Se ci poniamo da quest'ultimo punto di vista, riconosciamo che ogni superficie reale, chiusa, bilatera, a connessione finita, priva di singolarità, può essere assunta come rappresentante di una curva algebrica, anzi di infinite curve algebriche anche birazionalmente distinte; infatti l'identità birazionale di due curve impone condizioni più restrittive che l'identità topologica delle rispettive superficie di RIEMANN. Segue che un invariante topologico, qual'è il genere, dà un invariante per trasformazioni birazionali, ma l'inverso non sussiste, e ad es. i moduli della curva, che sono invarianti birazionali, non hanno corrispondenti invarianti topologici. Solo se il genere è zero, mancano i moduli, e la superficie definisce completamente la classe delle curve razionali, trasformabili birazionalmente in una retta.

Passiamo ora alle superficie algebriche e alle corrispondenti varietà di RIEMANN a quattro dimensioni. Il primo dei due punti di vista sopra esposti porta a studiare le varietà reali a più fogli quadridimensionali collegati attraverso un ciclo bidimensionale, o come sogliamo dire col linguaggio della geometria algebrica (considerando insieme punti reali e complessi), i piani multipli con una data curva di diramazione. Sorge qui la questione fino a qual punto possa estendersi a questi piani il classico teorema di esistenza delle funzioni algebriche, dovuto a RIEMANN, il quale afferma che una retta multipla con assegnati punti di diramazione è la immagine di una curva algebrica, determinata a meno di trasformazioni birazionali, quando nei punti di diramazione siano fissate le connessioni fra i vari esemplari della retta. Il problema è molto più complesso e la risposta meno semplice nei casi degli enti algebrici a due dimensioni. L'ENRIQUES con un'acuta analisi ha portato cinque anni or sono un contributo essenziale alla questione. Essa è stata ripresa in questi ultimi mesi dallo ZARISKI, il quale con considerazioni topologiche e gruppali ha ottenuto notevoli risultati, che formeranno argomento di una comunicazione nella sezione di geometria.

Questioni di altra natura sorgono se esaminiamo la varietà di RIEMANN a quattro dimensioni sotto l'aspetto puramente topologico. Può una qualsiasi varietà connessa, chiusa, bilatera, priva di singolarità, esser assunta come rappresentante reale di una superficie algebrica? Il LEFSCHETZ risponde negativamente; occorre infatti che sia pari la connessione lineare, cioè il numero dei cicli indipendenti ad una dimensione, mentre esistono varietà a connessione lineare dispari. Si intuisce però che debbano intervenire altre condizioni, ma queste sono per ora ignote.

Supponiamole soddisfatte, partiamo anzi dalla varietà di RIEMANN rappresentante una data superficie. Vi saranno verosimilmente infinite altre superficie, birazionalmente distinte, rappresentabili sulla stessa varietà quadridimensionale dal punto di vista topologico. Formeranno esse un sistema continuo (come succede nel problema analogo per le curve), o si distribuiranno in un numero finito o infinito di famiglie staccate fra loro? Non conosciamo per ora la risposta. Solo sappiamo anche qui che ogni invariante topologico della varietà dà un invariante della superficie relativamente a quelle trasformazioni birazionali che mutano punti in punti senza eccezione, mentre non è vero l'inverso. Così la connessione lineare della varietà dà il doppio della irregolarità della superficie. La connessione superficiale, cioè il numero dei cicli a due dimensioni, diminuita del doppio della connessione lineare, dà, a meno di una costante numerica, l'invariante di ZEUTHEN-SEGRE, grazie ad una formula del PICARD completata da ALEXANDER. Il numero dei cicli bidimensionali divisori dello zero dà un invariante che il SEVERI aveva introdotto nella teoria della base. Ma gli invarianti che apparivano come fondamentali nella teoria algebrico-geometrica, quali il genere geometrico, il genere aritmetico, e il genere lineare, non si traducono, a quanto pare, in invarianti topologici. E si rivela qui la ragione di quelle profonde divergenze che si erano presentate sin dagli inizi fra la teoria delle curve e quella delle superficie algebriche. Sotto vari rapporti, lo ripetiamo, e principalmente sotto l'aspetto topologico, il genere di una curva ha come analogo, non già il genere geometrico o aritmetico di una superficie, bensì la irregolarità che è la differenza tra questi due caratteri.

Supponiamo che la superficie da cui si parte sia razionale, sia anzi rappresentabile sul piano punto per punto senza eccezione. La varietà di RIEMANN corrispondente ha nulla la connessione lineare ed uguale ad 1 la connessione superficiale; basteranno queste due proprietà a caratterizzare la riemanniana delle superficie razionali, a quel modo come la sfera rappresenta nel campo reale le sole curve razionali? Nemmeno qui sappiamo dare una risposta; ma qualche indizio farebbe pensare che la risposta possa esser negativa.

Tutti questi dubbi, che non si trovano nell'opera del LEFSCHETZ, ma che essa suggerisce, costituiscono, a dir vero, la misura della nostra ignoranza. Vediamo invece quali conoscenze ci porti l'indagine che il geometra americano conduce ponendosi sopra un terreno non esclusivamente topologico.

Una delle sue idee più geniali sta nella distinzione che egli introduce fra i cicli bidimensionali della varietà di RIEMANN a quattro dimensioni. Tra i detti cicli si trovano anzitutto le riemanniane delle curve algebriche appartenenti alla superficie che la data varietà rappresenta. Egli li chiama *cicli algebrici* a due dimensioni. Il numero di questi cicli indipendenti è precisamente l'invariante $\varrho$ di PICARD-SEVERI, giacchè si presenta il fatto notevole che la dipendenza algebrica tra curve, di cui parla il SEVERI, si traduce, secondo il LEFSCHETZ, nella dipendenza per omologia contemplata dall'*Analysis situs*. Accanto ai $\varrho$ cicli alge-

brici vi sarà generalmente un certo numero $\varrho_0$ di cicli *non algebrici* a due dimensioni, indipendenti da quelli e tra loro. Essi possono scegliersi in modo da non incontrare in nessun punto i $\varrho$ cicli algebrici.

Ora il LEFSCHETZ stabilisce una bella relazione fra i cicli algebrici e gli integrali doppi di prima specie che intervengono nella definizione trascendente del genere geometrico dovuta a CLEBSCH e NOETHER; (sono integrali a differenziale algebrico che, estesi ad un qualsiasi ciclo bidimensionale della varietà, hanno valore finito). Il LEFSCHETZ dimostra che la condizione necessaria e sufficiente perchè un ciclo sia algebrico è che ogni integrale doppio di prima specie, esteso al ciclo, fornisca un valore nullo. Invece quegli integrali doppi impropri, che il PICARD non conta nel computo degli integrali doppi indipendenti di seconda specie, hanno nulli i periodi lungo i $\varrho_0$ cicli non algebrici scelti nel modo sopra indicato; donde segue il risultato del PICARD che $\varrho_0$ è anche il numero degli integrali doppi distinti di seconda specie.

Se un integrale doppio improprio fosse di prima specie, esso dovrebbe aver nulli i periodi lungo tutti i $\varrho+\varrho_0$ cicli bidimensionali della varietà di RIEMANN. Esistono integrali siffatti? È una questione che non ha ancora ceduto agli sforzi del LEFSCHETZ ed alle recentissime ricerche del SEVERI. I tentativi che io stesso ho fatto in proposito non mi hanno condotto sinora a risultati conclusivi, ma lasciano prevedere l'esistenza di nuovi caratteri invarianti di una superficie di fronte al gruppo birazionale, o almeno di interpretazioni sostanzialmente nuove di invarianti noti.

Come vedete la teoria algebrica e trascendente delle superficie algebriche, che credevamo qualche anno fa avesse raggiunto una forma quasi definitiva, promette di rivelare ancora fatti inattesi.

Per non prolungare questa conferenza, nulla dirò intorno alla teoria generale delle varietà algebriche a più dimensioni. Accennerò solo rapidamente ad una questione particolare, ma fondamentale, che può enunciarsi col linguaggio dell' algebra classica familiare a tutti voi. Data una equazione algebrica a più incognite, si domanda un criterio per decidere se la equazione possa esser soddisfatta identicamente ponendo le $n$ incognite funzioni razionali di $n-1$ parametri.

Se $n=2$, la questione, che interessa anche il calcolo integrale, ha avuto una risposta classica per opera di RIEMANN e CLEBSCH. Nel caso $n=3$, corrispondente alle superficie, ho potuto dare una risposta analoga, sebbene meno semplice: occorre e basta che certi due caratteri invarianti della superficie siano nulli. E, tanto nel caso delle curve, quanto in quello delle superficie, si possono scegliere opportunamente i parametri in guisa che essi stessi, alla loro volta, si esprimano razionalmente mediante le incognite.

Orbene, quest'ultimo fatto non si estende più alle equazioni con quattro incognite. Infatti l'ENRIQUES, ricorrendo ad una varietà a tre dimensioni studiata

dal FANO, ha potuto costruire una equazione che può risolversi ponendo le quattro incognite funzioni razionali di tre parametri, mentre non è possibile esprimere questi razionalmente mediante le incognite. Vi sono adunque, per dir così, delle varietà a più dimensioni semirazionali accanto alle varietà totalmente razionali.

Come decidere se una equazione assegnata a quattro incognite rappresenti una varietà razionale o semirazionale? Nulla sappiamo in proposito, nemmeno per i più bassi valori del grado, superiori a 2. Anzi, ricerche che il FANO prosegue da vari anni, e di cui vi parlerà in una sua comunicazione, fanno vedere quanto la questione sia complessa. Egli prende in esame le varietà che hanno nulli tutti i generi e i plurigeneri e le distribuisce in un numero finito di famiglie, di cui la prima si compone di varietà razionali, la seconda di varietà semirazionali e le altre di varietà che si staccano sempre più dalla razionalità. Una classificazione accurata di questi tipi getterebbe molta luce sopra una questione che è necessario risolvere per lo sviluppo futuro della geometria algebrica.

*Signori*

Nella matematica, più che nelle scienze fisiche dove la natura impone i problemi, ha qualche parte la dea capricciosa della moda, e si son viste teorie che dopo una vita effimera son cadute nell'oblio. Perciò, quando si vuole affrontare qualche difficile ricerca, è opportuno assicurarsi che l'indirizzo sia fecondo, che appartenga come ramo ad un tronco avente profonde radici, non ad un arbusto sorto per caso in un terreno sterile. Quando la risoluzione di un problema non sia imposta da applicazioni ad altre discipline o ad altri campi della matematica, si può chiedere un criterio sull'importanza di una questione alla storia della scienza, ed indagare le tradizioni a cui essa si connette.

Orbene, pochi rami di matematica possono vantare una genealogia così illustre come quello al quale si collegano le ricerche di cui vi ho parlato.

Quattro secoli or sono, in questa insigne Università, SCIPIONE DAL FERRO gettava le basi dell'algebra moderna. La risoluzione dell'equazione cubica, seguìta a breve distanza dalla risoluzione dell'equazione di quarto grado e dai primi studi sopra i numeri complessi, inaugurò quel periodo di indagini sulle equazioni algebriche ad una incognita che si chiuse tre secoli dopo colle ricerche di RUFFINI, di ABEL e di GALOIS. Lo studio delle equazioni a più incognite è molto meno progredito e, se si fa astrazione dalla teoria dell'eliminazione che ha già uno stabile assetto, e dalla teoria degli invarianti nel gruppo lineare che diede origine a tanti lavori, ben poco si conosce in questo campo. Eppure il problema di risolvere una equazione mediante funzioni razionali di parametri, del quale poc'anzi vi parlavo, o mediante irrazionalità prestabilite, è suggerito dalle grandiose vedute di GALOIS. Certo la ricerca presenta ardue difficoltà. Può darsi che la via più

adatta per eseguirla non sia ancora scoperta. Ma rinunziare all'intuizione geometrica, la sola che abbia permesso sinora di orientarsi in questo territorio intricato, vorrebbe dire spegnere la tenue fiammella che può guidarci nell'oscura foresta. D'altra parte la difficoltà di una ricerca, se scoraggia chi cerca i facili successi, esercita un fascino su quei giovani che, nati per la scienza, conoscono le gioie della lotta per la conquista del vero.

Io penso a costoro nel formulare l'augurio che essi riprendano con lena giovanile i problemi al punto in cui li abbiamo condotti, e portino la luce sopra questioni vitali per il progresso dell'analisi.

W. H. YOUNG

# THE MATHEMATICAL METHOD AND ITS LIMITATIONS

## 1.

1, 1. If, in adressing this Meeting of the International Congress of Mathematicians, I have chosen as my subject *The mathematical method and ist Limitations*, it is because I wish to direct the attention of Mathematicians of all countries to the importance of adopting it as a topic for all future Congresses, in view of the wide range of issues it involves, and this all the more that it must be regarded as *not* belonging properly to any one of the existing sections.

In a certain sense it may be said to require all the ressources of the *Historian*, of the *Philosopher*, of the *Scientist*, — using these terms in their most general sense — as well as of the expert Mathematician.

1, 2. It will be well first to point out that I conceive *Mathematics* as not only that which has been, or shall come to be, embodied in processes and concepts, successively developed from ordering by ordinal, and calculating by cardinal, numbers, through Arithmetic, Analysis, Theory of Numbers, Theory of Groups and the like, disciplines evolved, so to speak, step by step, of themselves, but also as including Geometry, Mechanics, Mathematical Physics, and other such disciplines which have been devised to image the so-called World of Realities.

By the Mathematical Method I understand, not only the utilisation of mathematical tools, and, in particular, of *Symbolism*, but also the application of mathematical *Intuition*, from the most abstract to the most nearly concrete. The Mathematical Method is employed in the most familiar operations of daily life, as well as in the laboratory of the scientist and the study of the Pure Mathematician.

In view of the wide sense in which I use the term *Mathematical Method*, I need hardly say that I shall not attempt in the short time at my disposal to discuss the subject in all its bearings.

## 2.

2, 1. From what I have said you will understand that the Mathematical Method is not confined to the employment of the theory of *Measurement*, extraordinarily fertile though this branch of our subject has certainly been.

The work of Pure Mathematicians of the 19th Century was partly applied to convince mathematicians themselves that the idea of measurement did not enter even into *Geometry* to the extent that was supposed. I need hardly say that the *Theory of Groups* does not involve measurement, and the same is true of the notion of *Function,* which, indeed, so little depends in itself on the idea of measurement, that, when the occurrence, or non-occurrence, of an event depends on the occurrence, or non-occurrence, of various combinations of other events, we are patently in presence of a functional relationship of a two-valued function of several variables, each assuming only two values, say zero when the event in question does not occur, and unity when it does. Here the idea of measurement is wholly absent, and this though the final decision as to whether an event has happened, or not, may depend in practice on an act of measurement, such, for instance, as the doctor has to carry out with his clinical thermometer.

Measurement, as such, represents the persistent attempt to replace *Quality* by *Quantity.* Yet when we try to express quality by a series of numbers, each number must itself have a *Quality-factor*, before the series of numbers individually and collectively can be intelligible. This is true, not only in Applied, but even in Pure, Mathematics. It is this alone which renders possible cooperation between Mathematics and other branches of human activity.

PLATO compared the utilisation of mathematical notions, in the investigation of the actual, to the *fitting of the sandal to the foot.* No more picturesque and suggestive image for the Mathematical Method, by which mathematical concepts, whatever these may be, are fastened on to the complex realities, could have been devised. The mathematical concepts must take the imprint of these realities, and only in so far as they are supple and lend themselves to natural deformations, do they add to, and strengthen, our conception of those realities.

2, 2. I must also in this connexion emphasize the fact that the tools which the Mathematical Method borrows from Mathematics are not merely its symbolism. If this is most frequently involved, it is because symbolism in Mathematics is merely a scheme of abbreviations for current terms and phrases in the *Mathematical Language.*

This Mathematical Language, which, though limited in its power of expression, is *par excellence* a universal language, bears too every analogy to ordinary speech, while its development has been, and is, far more rapid. For this reason, if for no other, its study might be recommended, even to Philologists, as revealing, with a clearness all its own, the processes at work in the infancy of all language, and as indicating lines on which the growth of a language should be encouraged.

2, 3. I do not propose to speak at length of the Methods of Mathematics itself, and it is unfortunate that a typographical error in the early edition of the Programme might give this impression. To one of these methods, attention must, however, be called, since with it is bound up, to a great extent, the ever increasing efficacy of Mathematics. I mean *The Method of Generalisation.*

The key-note in this method is the *eradication of the exceptional.* Some particular law, relation, or property, is regarded as paramount; and to render it supreme, certain concepts are generalised. In saving the one law, it is true, we sacrifice other laws, judged to be of minor import. But the balance is on the side of progress. The result is not merely the conceiving of a broader class of entities, comprising as a particular case those already known; but, in admitting the rebels, we emancipate the loyalists from the trammels of their original definition. In reality, no members of the new class *coincide* with the entities from which that class was evolved, for the definition of each such member is founded on the prior existence of its *forbears.* The whole body of Mathematics is thus raised to a higher level; as, for instance, in the passage from rational to real numbers, from real to complex, or from the Cauchy integral through the Riemann, to the Lebesgue, or again, from the concept of a single unique limit to the *Theory of Sets of Points.*

The active principle, the *Entelechie,* of the Method of Generalisation is precisely its *elimination of unessentials*; by this it proceeds to the *simplification* of its underlying concepts, in the sense of reducing their *generic properties.* At the same time, the generalisation most frequently reveals properties hitherto unperceived, as by the removal of a veil.

2, 4. These potentialities and the efficacy of the Method of Generalisation within the bounds of Mathematics, may serve, in part, to explain *why there is a Mathematical Method in Science,* what is its nature, and why the scientific investigator relies so implicitly upon it at every turn. The process of disregarding characteristics in the objects considered, is fundamental in every pursuit of human knowledge; as far as we can see, it leads ultimately to *Mathematical Concepts, in esse or in posse,* as the only ones that cannot be further simplified: and the advance in the development of the science of Mathematics over that of other sciences is such as to encourage hopes in those who appeal to it, which no other discipline would warrant to an equal degree.

At the same time, this appeal is vital to Mathematics itself. The science of Mathematics is not so self-contained as it tends to ultimately appear. It borrows its vivifying germs from other sciences, which appeal more urgently to the human mind, whose demands are greater incentives to work, than the purely methodological, or even aesthetic, demands of Mathematics left to itself.

It is for this reason that a study of the Mathematical Method in Science is

as necessary to the mathematician as to the scientist. He cannot afford either to lose the confidence of the scientific man, or to submit to the contempt which an ill-regulated appeal to mathematical resources inevitably entails.

2, 5. We are however encouraged to hope that Mathematics may rise in time to deal with most, or at least with many, of the essential problems that present themselves. Far be it from me to class myself with those who accept the dictum that *the whole universe could be summed up in one Differential Equation,* or even in a system of such equations. The solution of many even of the problems of today lies far beyond the Mathematics of our time, or of any definite epoch.

## 3.

3, 1. What is the nature of the problems confronting the human race for which a method is required? The problems which dire necessity sets before us are not solved by lengthy reflexion; for unforeseen accidents we require unforeseen expedients, foresight for apprehended dangers. And the Method has as much to furnish the question as to elicit the answer. *Verily in the clear statement of the problem lies more than half its solution.* How this familiar phrase confutes the attitude of those who put forward, as the one and only principle of experiment, *the putting the ear to Nature*, without any idea what to listen for!

3, 2. We may go further, and say that the *life of our mind* consists, above all, in a germination of new problems, each of which suggests another. There is no actual *solving* of problems, but a *referring back* from the more to the less complex, or *vice versa*, according to the trend of our thoughts. We cannot even claim to judge the unknown by the known, but only the less known by the more familiar.

## 4.

4, 1. The principle just characterised is in the main that of *the Method of Analogy.* From this point of view, all methods, and the Mathematical Method among the rest, are particular modes of the appeal to analogy. This is the one argument all men use. On the hustings, in the law-courts, in the pulpit, in Parliament, on the Stock Exchange, everywhere where men meet — here, if we look back to the Past, in Italy, on the Aventine Hill, — men have been impelled by the argument from analogy. It is all-powerful; it is the one force of an intellectual type which everyone understands: it acts, as far as we can judge, even in the realm of the lower animals. If we contemplate dispassionately the achievements of Science, nay if we read intelligently the works of our own most famous mathematicians, we shall find Analogy to have been everywhere their guide. In the unscientific world, the potency of the method is due largely to the

fact that the questions which it substitutes for other questions appeal to the mind as though they were statements of fact. In Science, those who own its sway claim, at least now-a-days, no more than the fertility of the method, and endeavour to be cautious in its application. In earlier times KEPLER might boldly state: *plurimum namque amo analogias fidelissimos meos magistros, omnium naturae arcanorum conscios* (1), but, since then, imagination in Science has gone somewhat out of fashion: and, in fear of losing caste, the scientist has grown proverbially matter of fact. Some of the most brilliant ideas which mankind has ever conceived have doubtless never been uttered.

4, 2. That is why we may often learn from Poets what we cannot from scientists. Sheltered behind the cult of form, the artist is far freer to encourage the flight of imagination, guided, as it always is, by the sense of analogies.

4, 3. What we want is not, indeed, a belief that the Method of Analogy will unlock all portals to knowledge, but to realise that *the argument from analogy is the only one we possess.* It seems to guide even Nature herself, as she proceeds from lower to higher forms, from existing species to new varieties. This is an aspect of Nature so suggestive and so impressive, that even one of the most abstract of Pure Mathematicians, RIEMANN, wrote down his belief in the *Soul of the Earth.*

Yet, as far as I can judge, no systematic investigation of even the most hackneyed analogies, no investigation, I mean, as to the extent to which they hold good, the nature of their limitations and their origin, has ever been attempted.

4, 4. In its most common form, as applied to the incidents of everyday life, the argument from analogy is scarcely a reasoned process at all, it reduces to a mere habit of thought.

Yet to how many men this is the only kind of cerebral commotion which they care to seek for! The mediocrity loves to do the same thing time after time. He likes to be in situations with which he is familiar, he likes to recognise a circumstance and apply his experience to take the next move.

To welcome a new situation, which sets the mind working in unfamiliar grooves, and awakens fresh trains of associations, requires already an intellectual power with which the common man is not endowed; it would, indeed, unfit him for the monotonous routine in which he revels.

That is why the Intellectual, asdel. in PLATO'S parable of the CAVE, has only too often been despised and rejected of men. Unfit to be an *employé*, he has not learnt to be a ruler.

---

(1) « For above all I love analogies, my most faithful teachers, acquainted with all the secrets of Nature ».

Yet, as this common method of thought, however mechanical, is but a particular and degenerate form of an intellectual process, the intellectual alone can properly analyse it, and check its consequences. Whole classes and nations of men are precipitated into anarchy and war by the evil power of imperfect analogies. Political and philosophical creeds are built up on scarcely any other foundation. Passwords are created which clinch the tacit argument in a way that no true argument ever could, and which contain in themselves a whole chain of analogies. Even the grammatical form of a word suffices to influence the attitude of mind, as students of Philosophy and Sociology are well aware.

Such causes of error also occur in the application of the Mathematical Method; but here, at least, they are reduced to a minimum. This alone would be a reason for the study, before all others, of the Mathematical Method, even were it not the most widely applied.

5.

**5, 1.** The experimentalist, whatever branch of scientific activity he may be engaged on, who disclaims much indebtedness to Mathematics, does not realise how unceasingly he relies on mathematical analogies and on mathematical calculation and reasoning. If he is a Physicist, or an Astronomer, he is not likely to underrate its value, he is now fully aware that when physical hypotheses have turned out to be most erroneous, it has been often due to the fact that Mathematics was still too undeveloped to provide any means of checking them.

**5, 2.** The successes of the Mathematical Method in Physical Science have been, moreover, of late years, so tremendous and so far-reaching in their effects that these have been felt in the remotest corners of the world, thereby removing distinctions between Civilisation and Barbarism.

And although these have put in the shade for the moment the still more striking progress in Astronomy of an earlier age, we are expecting equally momentous consequences to the human race to emerge from the mathematical discussion of the electro-magnetic field of the sun, based on the joint work of astronomer and physicist.

On the other hand, the physicists have revived in a modified form older physico-astronomical theories of the atom. And they have been so confident in the outcome, that they have told us in their enthusiasm that we really all but hold the Electron in our hands and behold it with our eyes; and yet its existence is but a mathematical one, just as was that of the molecule, even before the new theories of DE BROGLIE and SCHÖDINGER placed the whole theory in a still more mathematical light.

In Chemistry, the epoch-making discovery of *Argon* in 1894, as I heard from RAMSAY himself, had as determining factor the numerical work of CAVENDISH,

more than a century before. While today, large portions of the science have already taken a mathematical form, and have come almost to be regardedas a branch of Mathematical Physics.

## 6.

6, 1. But, if the Mathematical Method has been most fruitful in the Physical and cognate Sciences, it can point to an increasing influence in other departments, — and we may perhaps learn something of this from other speakers, — in *Heredity*, in *Economics* and *Art*.

In these and in many branches of intellectual research, the Higher Mathematics of our epoch has hitherto proved of little use; it is for the most part what I should call *Large-Scale Mathematics* which has been employed, primitive concepts and rough-and-ready processes, too humble to have sought to be represented at an International Congress of Mathematicians. And yet, these also deserve their place of honour, if only for services like that rendered by Sir RONALD ROSS in utilising the simple idea that it is on the *percentage* of mosquitoes to the individual, not on their mere presence, or even their number, that depends the epidemic of malaria, thereby creating anew the science of tropical medecine.

6, 2. But a new *Fine-Scale* Mathematics, the outcome of that mathematical inheritance which we shall pass down and the new environment which these new sciences create, will arise to cope with the finer problems that suggest themselves. One of the chief interests to us in those fresh problems, on which our colleagues are to speak, will lie in the vistas that may be opened for the development of Mathematics itself.

6, 3. Indeed, the idea of degrading Mathematics in Biology, Sociology, Economics, Politics, to mere Statistics, [or even to the Theory of Probability, magnificent as are its promises], can only take form in the minds of men immersed in the details of purely observational work.

The task of Mathematics is above all that of devising abstract concepts, of *immaterialising*, so to speak, some phase, some event, some reality, in some single *idea*. Thus did the concept of *Attraction* emerge in all its power of application from the mind of NEWTON. A modern, still somewhat embryonic parallel is the idea of *Ophelimity* in *Social Economics*, due, I believe, chiefly to PARETO. On the obtaining of such conceptions as these, the progress of Science must depend. The discovery of a new law is bound up with the framing of a new concept.

## 7.

7, 1. This question belongs to the second part of my subject: *The Limitations of the Mathematical Method*.

If the Mathematical Method is felt to be far from applying directly to all the problems of today, because Mathematics appears to lack many of the concepts necessary for their adequate discussion, this does not prejudice in any way the possibility of such concepts being devised in the Future, but, on the contrary, acts as an incentive to the Mathematician to enlarge and enrich his own science, and constitutes no final check on the scope of the Method.

7, 2. But that is not the only type of limitation which must be recognised in the application of the Mathematical Method. That relates merely to the absence, in any one mathematical scheme, of entities, or facts, corresponding to possible objects, or phenomena, in a given region of observation.

The converse limitation also is inherent in the Mathematical Method, as a form of the Method of Analogy, namely *the lack of phenomena corresponding to accepted mathematical concepts, or relations.*

7, 3. The two forms of limitation are indeed the precise analogue of those found in the most current arguments from Analogy; whenever a scheme $A$ is compared to a scheme $B$, the comparison unfailingly breaks down at some point; entities exist in $A$ which have no correlatives in $B$, and *vice versa*; properties of $A$ may be adduced which find no parallel in the scheme $B$, and *vice versa.*

It is scarcely necessary to point out, however, that there are great differences, in this respect, between the Mathematical Method and that of Analogy in its ordinary and every-day use. A mathematical discussion of limitations often involves serious difficulties, as we shall be reminded if we think of the efforts that have been required to elucidate the *Existence Theorems* of Mathematics itself. Where, on the contrary, the discussion is carried on in ordinary language, and in terms of every-day life, errors are relatively easily detected and avoided, though even this is only in a partial sense true. It would be more correct perhaps to say that subtle errors slip in at quite different points in different types of the argument from analogy, and that a mind trained to avoid them in one type, is not thereby qualified to discover them in another, even on a detailed examination. If the specific limitations of the Method of Analogy, in the widest sense of the term, are to be defined at all, they must be discussed very profoundly in connection with each application.

This discussion has to bring out what is the *Region of Validity* of the argument in each case, its *Geltungsbereich.* At present no systematic attempt of this kind, on a large scale, seems to have been made, and men seem, for the most part, divided between the tacit assumption that the Region of Validity is unlimited, and the overt opinion that it reduces to zero; both these standpoints are certainly untenable.

7, 4. The two forms of the limitation of the Mathematical Method must be looked upon essentially in different lights. While on the one hand each failure of the

Scientist to find the tools he requires must be considered carefully by the Mathematician with a view to supplying the want, on the other hand the presence in any mathematical scheme of entities and facts *not* corresponding to specific objective facts in Nature must be pointed out, with a view to the safeguarding of those who appeal to Mathematics. These last must not be allowed to assume that a demonstrated mathematical result constitutes a *proof* of the existence of a so-called *truth* in the world of phenomena.

7, 5. The *experimental* Physicist hardly falls into this latter error, one that reappears at more or less regular intervals in the History of trhought. Even the *theoretical* Physicist rarely concedes such absolute power to Mathematics. We have, for instance, been told by the enquirer himself, of the frigid reception accorded to his question: What is the physical analogue of the most general group of conformal transformations of four-dimensional space that leaves unaltered the equations of MAXWELL-LORENTZ?

7, 6. What can be said with safety is that the existence of mathematical relations, properties, and entities — among which we may particularly mention the notion of *Infinity* — can only *suggest* the *question* of the existence in Nature of corresponding objects, that may, at least approximately, or from a particular point of view, be assimilated to them. It was not as an argument, but as a confession of faith, that LEIBNIZ wrote, with reference to the *Infinite in Nature*:

« Je suis tellement pour *l'infini actuel*, qu'au lieu d'admettre que la nature l'abhorre,.... je tiens qu'elle l'affecte partout, pour marquer les perfections de son auteur. Ainsi je *crois* qu'il n'y a aucune partie de la matière qui ne soit, je ne dis pas divisible, mais actuellement *divisée*, et, par conséquent, la moindre particule doit être considérée comme un monde plein d'une infinité de créatures différentes ».

This subject of the actual infinite has been discussed interminably in philosophical circles. What however has not been sufficiently emphasized is that the infinite is a *convention*, or, more strictly perhaps, part of a convention, which has enormously simplified mathematics, and rendered possible theories, calculations and consequent practical discoveries, that centuries of work would not have produced, if our mind had magisterially excluded the concept of the Infinite. If we could prove that the universe was in every sense of the word *bounded*, we should continue to use the notion of infinity with profit as much as before.

Two-dimensional intelligent insects, living on the surface of a great sphere, would certainly introduce the notion of *parallelism*, and construct a Euclidian geometry similar to ours. If in the course of time, and at the cost of tremendous labours, these insects succeeded in compassing the whole of their universe, thereby realising that it was not a flat space, but a curved one, this would not in any way invalidate their mathematics, nor prejudice its utility.

We have ourselves no hope of mapping out our universe by actually penetrating into every part. Only the poet Dante could permit himself to face such a conception, — Dante, who seems to have imagined the Universe, more or less vaguely, as a three-dimensional analogue of the above two-dimensional spherical surface.

7, 7. The necessity for the recognition of the region of validity may be illustrated by the following simple *fable*:

The barbaric chief of a primitive tribe, who was able to count as far as three or four, determined to arrange his warriors in order of increasing strength. The cataloguing was entrusted to the Chief Priest, an ancient sage, imbued with the study of numbes and their arithmetic, and was carried out on the results of individual combats. The classification finished, the chief asked the advice of the priest as to the arranging of the warriors in parties of two or three, of equal strength, to attack the enemy at various points. The Priest advised him in the first place to send out the *first* with the *fourth*, the *second* with the *third*. But the second and the third succeeded so much better in the fight, that the Chief, in dudgeon, disgraced the first warrior from his high estate, and renounced the advice of the priest.

7, 8. In this fable we perceive the most primitive form of the application of the Mathematical Method, the seriating in *a certain order*. In this process, the idea of *quantity* does not enter. A certain *attribute* is recognised as common to the objects of a given class, an attribute such as *strong* which may be said to be *more or less*, in the pure comparative sense. The idea of there being a corresponding *quality*, the introduction, perhaps, of a corresponding word, *strength*, leads to the concept of that quality being *possessed in a greater or less degree*, and to a *numerical classification* of more or less effective form. As long as the ordinal character of the numbers is respected, the results are confined to *ordinal mathematics*. But once the order-numbers are assimilated to *cardinal numbers*, whose values represent, and even to some extent measure, the various *degrees* of the quality considered, processes valid for cardinal numbers will suggest combinations of the seriated objects, which may, or may not, prove legitimate.

7, 9. The combinatory properties of cardinal numbers, which comprise ultimately all formal analysis, provide a practically unlimited series of questions, as to the corresponding properties of the objects under consideration. But they cannot of themselves lead to valid results; and the inquiry may be entirely misleading, if the order-numbers used do not happen to be chosen in the *most favourable manner*. This is what physicists mean, when, for instance, they insist that the proper choice of the variable is paramount in the investigation of a law.

Is there, however, in all cases, *a most favourable manner of choosing the variables*? There seems no reason for supposing this to be true.

A case in which such a choice seems, at any rate, not yet to have been discovered, arises in the *Theory of Colour-Vision.* In so far as it appeals to Mathematics, this theory borrows a number of its mathematical tools from Physical Optics, and, in particular, seems to have adopted the mode of characterising a monochromatic light-radiation by its *Wave-length.* One of the fundamental problems, that of *Colour Mixture,* has, however, no counterpart in Physical Optics, properly so called, since the fusion of « mixed colours », as far as appears to be known at present, is a *physiological,* and not a *physical,* phenomenon. The assumption of the wave- length as the characteristic of a monochromatic light, does not seem to have availed much towards the solution of the problem.

The questions are complicated by the fact that the « colour » of a mixed light varies when the *intensity* of one of its constituents is altered, so that this also must be among the characteristic data.

Thus, for instance, in the natural enquiry into the mutual relation of *Complementary Colours,* the attempt to discover a relation between their *Wave Lengths* might with fair probability have been condemned on *a priori* grounds: the unconcerned retention of the wave length as a working variable, after it had served only as a characterising *Order-Number,* and the ignoration of the second variable in the case, seem sufficiently grave errors to warrant any failure.

## 8.

There is one point which I wish to make before concluding. In characterising the Mathematical Method as a form of the Method of Analogy, and in pointing out the only limitations which it can naturally possess as such, we do away with a limitation which a more or less conscious bias has often *artificially* impressed upon the Method.

It does not matter if, in different portions of the same region of enquiry, comparison-schemes are employed which, when pushed to their extremes, are *mathematically incompatible.* The fact that Physics, today, is using at one and the same time the *Theory of Relativity* and the *Newtonian Theory,* is no indication of a *Collapse of Science,* preparatory to a *Period of Scepticism.* It must be taken as an index rather of a *New Birth.* There is no sign of decrepitude in the extraordinarily prolific output of physical hypotheses during our time, descending into greater and greater detail: the *Ether,* with its contradictory properties, diaphanous, so that a gramme of it would scarcely fill a cubic kilometer, denser than platinum, rigid as steel, and in a state of stress, but possessing a porous structure, so that solid bodies pass freely through it; the Bohr *Atom,* endowed with a complex planetary system of *spinning Electrons,* which, Mahatma-like, pop in and out of existence, like the hypothetical motor-car, « moving along a road at thirty miles an hour, not continuously, but

so as to appear at each successive mile-stone for two minutes ». These ideas may seem to our descendents quaint, but not senile. If we smile at the Myths of our forefathers we admire the prowess of which those myths were the guiding stars.

Indeed it does not matter, as the Theory of Mathematical Correspondences would suggest to us, without our leaving our own realm, how fanciful the mathematical scheme may be, or how distorted. The essential thing is, that we should be able to read, from the picture, properties of Reality. It is not for us to say that such a scheme should be discarded, merely because it does not appeal to us. Let those who can do so, use it! They will be judged by the results they obtain, by their power to predict the Future, by the plausability and fertility of the guesses they are enabled to make as to the Past and to the Unseen, by the progress they may initiate in the mastery of Nature, and not merely by the measure of success they may have in giving concrete form to their ideas, or in realising them materially.

VITO VOLTERRA

# LA TEORIA DEI FUNZIONALI APPLICATA AI FENOMENI EREDITARI

Gli studî da me incominciati circa 45 anni or sono intorno a ciò che io allora chiamavo *funzioni di linee* e che più tardi ebbero il nome di *funzionali*, erano fondati sul concetto del passaggio dal discontinuo al continuo (suggerito dall'analogo passaggio che è la base del calcolo integrale) e, prendendo le mosse dai procedimenti del calcolo delle variazioni, miravano ad un'estensione di esso. Anzi può meglio dirsi ad una sua doppia estensione, sia perchè davo la maggiore generalità possibile al modo di far dipendere una quantità da tutti i valori di una funzione in un dato intervallo, (dipendenza che nel calcolo delle variazioni è limitata al processo di quadratura), sia perchè non ponevo alcuna limitazione alla natura dei problemi nei quali figuravano i nuovi elementi introdotti, problemi che nel calcolo delle variazioni sono invece ristretti a quelli di massimo e di minimo. La *derivazione* di una funzione di linea fu il primo concetto stabilito, donde scaturì quello di differenziale di una funzione di linea: se però allora seguii questa via, è certo che oggi conviene, come hanno osservato HADAMARD, FRÉCHET, PAUL LÉVY ed altri, che hanno ripreso in esame la questione, partire piuttosto dal concetto di differenziale e ricavare in conseguenza quello di derivata.

Applicai quindi questo concetto alla estensione della serie di Taylor allo scopo di gettare le basi di sviluppi analitici e funzionali analoghi a quelli che si hanno per le ordinarie funzioni analitiche. A questo proposito è da osservare che la varietà delle espressioni analitiche, proprie a rappresentare i funzionali, supera di gran lunga l'insieme delle rappresentazioni delle funzioni ordinarie, il che ha colpito tutti coloro che hanno avuto occasione di trattare questo soggetto. Si poteva inoltre subito riconoscere che i differenziali delle funzioni di linee dovevano essere classificati in varie categorie secondochè essi contenevano o meno dei termini affetti dalle variazioni della funzione (costituente l'elemento variabile) in punti determinati o anche le variazioni delle sue derivate pure in determinati punti. Già il calcolo ordinario delle variazioni offriva di ciò un esempio nel caso che la variazione di un integrale semplice dipenda dalle variazioni ai limiti. Ma il nuovo concetto di funzionale portava a nuove forme di differenziali. Avremo l'occasione più tardi di tornare sopra questo punto, mettendone in luce l'importanza in un'applicazione di carattere meccanico.

La proprietà delle derivate dei funzionali, che si rilevano con le simmetrie loro relative ai parametri da cui dipendono, e le integrazioni del differenziale di un funzionale con un procedimento che si basa sopra un'estensione del teorema di Stokes, insieme a ciò che abbiamo detto precedentemente, costituivano e ritengo che costituiscano tuttora i capisaldi della teoria.

Questi concetti fondamentali avevano però bisogno di un'ulteriore chiarificazione mediante un'analisi delicata e sottile. Nella sua bella opera sull'analisi funzionale, PAUL LÉVY ha assolto magistralmente questo compito riproducendo ed estendendo quanto era stato fatto prima di lui da HADAMARD e da molti altri su questo argomento. Io non avevo potuto condurre a termine questo studio critico, in quanto la mia attenzione era stata subito attratta in altre direzioni: infatti l'applicazione dei principî teorici ai nuovi problemi che si presentavano, le possibilità di risolvere antichi problemi insoluti, suscitavano per primi la curiosità e l'interesse; onde era naturale la tendenza a non approfondire subito queste parti più astratte della ricerca, rimandandone a più tardi lo studio.

* * *

Non ritengo sia oggi opportuno di esaminare le diverse vie per cui si è svolta l'analisi funzionale. Ciò mi condurrebbe troppo lontano ed esorbiterebbe dal soggetto che mi sono prefisso e che la ristrettezza del tempo mi concede solo di svolgere. Non posso però passare sotto silenzio che una delle prime applicazioni che si presentò fu quella di impiegare il passaggio dal discontinuo al continuo per estendere i problemi algebrici. Naturalmente le equazioni integrali lineari (estensione immediata dei sistemi d'equazioni di primo grado) richiamarono subito la mia attenzione e per conseguenza uno dei primi risultati da me ottenuti fu la soluzione loro nei casi più semplici ed elementari impiegando per la prima volta il detto passaggio. Ho largamente esposto nelle mie lezioni svolte sedici anni fa alla Sorbona questi argomenti ponendo in luce, sia il concetto fondamentale che fu la guida nel procedimento impiegato, sia il legame con le teorie generali delle equazioni integrali e di altre più generali.

Accennando io qui alle equazioni integrali, alla loro teoria generale e al loro legame coi metodi che si ispirano al passaggio dal discontinuo al continuo, il mio pensiero si rivolge reverente alla memoria di un matematico illustre che oggi abbiamo il dolore di non vedere tra noi. Il mesto ricordo va alla memoria di IVAR FREDHOLM, il cui nome onora la Scuola Matematica Svedese, la quale, capitanata dal MITTAG LEFFLER, anch'egli con nostro immenso dolore scomparso da poco più di un anno, rese così eminenti servigi alla Analisi Matematica.

Ma le equazioni integrali non furono che un primo passo nel campo delle estensioni algebriche, nel quale il prof. HILBERT (circa quindici anni dopo che le prime ricerche sui funzionali erano cominciate) ed altri dopo di lui, dovevano ottenere risultati così notevoli.

Le equazioni integrali furono inoltre il primo avviamento agli studî sulle equazioni integro-differenziali e sulle equazioni alle derivate funzionali. Molte questioni di fisica e di meccanica e numerose estensioni di ricerche classiche conducono a queste nuove relazioni fondamentali dell' analisi funzionale.

Tali problemi si presentarono da principio come questioni di carattere particolare; ma una lunga esperienza insegna che sono appunto i problemi particolari, sorgenti dall' esame dei fenomeni naturali, che danno luogo alla creazione dei metodi analitici più fecondi e suscettibili col loro svolgersi di maggiore estensione, mentre invece le questioni generali stabilite a priori artificialmente non sono spesso le più proficue.

* * *

Per restare strettamente nel nostro soggetto, tralasceremo di parlare delle equazioni, le quali dipendono dalla estensione, studiata fra gli altri dal FRÉCHET, dei metodi di HAMILTON e di JACOBI ai sistemi continui, di quelle stabilite da HADAMARD e PAUL LÉVY per le funzioni di Green, e di tante altre che si ricollegano anche alle più recenti ricerche di meccanica ondulatoria. E così non ci sarà possibile di parlare degli studî di EVANS e di PÉRÈS, delle ultime memorie del FANTAPPIÈ e di molti altri che hanno portato così utili contributi al calcolo funzionale, e dovremo limitarci solo a citare gli studî generali sugli spazii astratti e sulle loro corrispondenze che sono fra i più larghi e comprensivi della matematica moderna dei quali tratta la recente opera del FRÉCHET ricollegante in una vasta sintesi il calcolo funzionale coll' analisi generale del MOORE.

Ci converrà invece soffermarci su quelle equazioni integro-differenziali che discendono dai problemi di natura ereditaria.

Ho avuto già spesso occasione di parlare sopra questo argomento ed ho esposto i fondamenti della teoria matematica dei fenomeni ereditarî nelle mie lezioni della Sorbona.

Un fenomeno che ha luogo in un dato mezzo o in seno ad un dato sistema materiale è di natura ereditaria quando il suo modo di svolgersi in un certo istante è determinato, oltre che dalle condizioni del mezzo o dal sistema in quell' istante, anche dalle condizioni attraversate in passato, durante tutto un periodo di tempo, dal mezzo stesso o dal sistema materiale. Il fenomeno cessa di essere di natura ereditaria se si svolge solo dipendentemente dallo stato attuale del mezzo o del sistema materiale considerato.

Le equazioni che regolano i fenomeni non ereditarî sono in generale di natura differenziale. Tale qualità conservano anche le equazioni che si riferiscono ai fenomeni ereditarî, ma in questo caso le equazioni diventano di natura più complessa. Infatti, siccome i fenomeni stessi dipendono dagli infiniti stati attraversati dal sistema nei tempi che han preceduto l' istante attuale, dovranno esistere delle azioni che si esercitano presentemente, ma che sussistono in virtù delle condi-

zioni che si sono svolte durante tutto il tempo passato. Queste azioni si calcoleranno quindi mediante dei funzionali, i quali alla loro volta in casi particolari potranno esprimersi mediante integrali definiti estesi ad intervalli di tempo facenti capo al momento presente. Le espressioni di queste azioni, che compariscono nelle equazioni, daranno dunque alle equazioni stesse un carattere funzionale e nei casi particolari, a cui abbiamo fatto allusione, daranno loro un carattere integrale. Questo si aggiunge a quello differenziale preesistente: perciò si otterranno equazioni aventi contemporaneamente i caratteri di equazioni differenziali e di equazioni integrali, donde il loro nome di *equazioni integro-differenziali.*

Nelle lezioni citate e in altre memorie ho svolto lo studio delle equazioni integro-differenziali che si trovano per varî fenomeni ereditarî di natura meccanica e fisica relativi sia a sistemi d'un numero finito di gradi di libertà sia a sistemi continui.

L'esame di queste equazioni ha dato luogo ad una classificazione delle equazioni integro-differenziali, alla ricerca di metodi per integrarle ed allo studio degli elementi arbitrarî che da esse nascono. Varî metodi classici, come quelli di Green e quelli delle caratteristiche, si possono estendere allo studio delle equazioni integro-differenziali e si possono ottenere soluzioni analoghe alle soluzioni fondamentali delle equazioni alle derivate parziali.

* * *

Tuttociò costituisce la parte matematica delle ricerche le quali conducono ad un principio di carattere generale la cui portata va, a mio modo di vedere, molto al di là del campo analitico propriamente detto, pur avendo notevoli ripercussioni nel campo stesso.

Per maggior chiarezza, esprimiamoci con linguaggio matematico. Chiamiamo $q$ il parametro da cui dipende un certo fenomeno e denotiamo con $t$ il tempo. Se noi scriviamo

$$F(q(t))$$

avremo una quantità che dipende dal valore del parametro nell'istante $t$ (istante attuale). Ora

$$q(t-\tau)$$

è il valore del parametro stesso in un istante $t-\tau$, cioè in un istante che ha preceduto di $\tau$ l'istante attuale, quindi

$$\int_0^{T_0} \Phi(\tau)q(t-\tau)d\tau \tag{1}$$

sarà una quantità che dipende da tutti i valori del parametro $q$ in un periodo di tempo di ampiezza $T_0$ che precede l'istante attuale. Essa è una particolare espressione propria delle quantità che risentono la eredità del parametro $q$ durante l'intervallo di tempo $(t-T_0, t)$.

Analogamente

$$aq(t)+\int_0^{T_0}\Phi(\tau)q(t-\tau)d\tau,$$

ove $a$ denota una costante, dipenderà dal valore attuale di $q(t)$ e dall'eredità lasciata da questo parametro durante l'intervallo di tempo $(t-T_0,\ t)$.

Essa sarà un'espressione lineare e perciò la corrispondente eredità si dirà *lineare*. Quella più generale corrisponde a un funzionale che dipende da tutti i valori di $q(t-\tau)$ per $\tau$ compreso fra $0$ e $T_0$; essa si scriverà col simbolo generalmente adottato

$$F\left|\left[q(t-\overset{T_0}{\underset{0}{\tau}})\right]\right|=F\left|\left[q(\overset{t}{\underset{t-T_0}{\tau}})\right]\right|.$$

Riprendiamo l'espressione (1); allorchè essa denota un'azione (forza) questa sarà acceleratrice se $\Phi(\tau)$ sarà positivo, mentre se $\Phi(\tau)$ sarà negativo l'azione sarà ritardatrice. Inoltre ogni elemento dell'integrale

$$\Phi(\tau)q(t-\tau)d\tau,$$

può assumersi come una componente dell'azione totale e precisamente può ritenersi esser quella componente che dipende dall'eredità del parametro $q$ nell'intervallo di tempo $(t-\tau-d\tau,\ t-\tau)$. Vedremo tra poco come può modificarsi questo concetto dell'azione ereditaria elementare.

Nelle formule precedenti noi abbiamo tenuto conto dell'eredità limitatamente all'intervallo di tempo $T_0$ anteriore all'istante attuale; noi abbiamo cioè supposto che l'eredità vada dissipandosi col tempo, tanto da poter ammettere che sia

$$\Phi(t)=0 \qquad \text{per} \qquad t\geq T_0.$$

In tal caso $T_0$ si chiama la *durata dell'eredità*.

Ma si può supporre che si debba tener conto dell'eredità anche in tempi infinitamente lontani, allora all'espressione (1) dovrà sostituirsi l'altra

$$\int_0^{\infty}\Phi(\tau)q(t-\tau)d\tau \tag{1'}$$

che ha significato analitico ben determinato assumendo convenientemente l'ordine di infinitesimo di $\Phi(\tau)$ per $\tau=\infty$. Lo stesso si dica quando l'eredità non è lineare, sostituendo alle precedenti espressioni l'espressione funzionale:

$$F\left|\left[q(t-\overset{\infty}{\underset{0}{\tau}})\right]\right|.$$

Le formule (1) e (1') sono suscettibili di scriversi anche nel modo seguente:

$$\int_{t-T_0}^{t}\Phi(t-\tau)q(\tau)d\tau \quad , \quad \int_{-\infty}^{t}\Phi(t-\tau)q(\tau)d\tau.$$

Come abbiamo detto sopra, $\Phi(t-\tau)q(\tau)d\tau$ è la parte di eredità lasciata al tempo $t$ dal valore $q(\tau)$ dal parametro nel tempuscolo $(\tau, \tau+d\tau)$. In tal modo noi assumiamo a priori che questa parte di eredità dipende solo dalla distanza di tempo $t-\tau$ tra l'istante attuale e l'istante $\tau$. Ma nulla c'impedirebbe di supporre che in generale $\Phi$ fosse una funzione, oltre che della distanza di tempo $t-\tau$, anche di $t$, cioè che si avesse $\Phi(t, t-\tau)$. Si verrebbe così ad ammettere che la legge che individua il contributo lasciato per eredità variasse col tempo. Questo che noi diciamo per l'eredità lineare può evidentemente ripetersi per l'eredità non lineare nella quale devesi ricorrere al concetto generale di funzionale. Vengono così a distinguersi due sorta di eredità: quella la cui legge resta invariabile col tempo e quella che invece si altera col tempo. Ora il principio cui sopra alludevo serve a distinguere le due specie di eredità, giacchè esso suona così: *se a cause periodiche, con qualunque periodo, corrispondono effetti ereditari periodici, l'eredità deve essere invariabile col tempo, e reciprocamente, se l'eredità segue una legge invariabile, le cause periodiche generano sempre effetti periodici.*

Tali relazioni fra cause ed effetti, allorchè l'una e l'altra possono rappresentarsi mediante le due coordinate di un punto di un piano (punto rappresentativo), hanno per immagine geometrica un ciclo chiuso indefinitamente percorso dal punto rappresentativo nel piano, coll'infinito volgere del tempo. Perciò a questo principio ho dato il nome di *principio del ciclo chiuso.* I fenomeni suscettibili di essere rappresentati con cicli chiusi possono distinguersi con questo nome ed i nuclei $\Phi(t-\tau)$ corrispondenti a eredità di natura invariabile vengono detti *nuclei appartenenti al ciclo chiuso.* I fenomeni di natura ereditaria, che ci rivela il mondo fisico appartengono in generale al ciclo chiuso.

I cicli contengono in taluni casi delle singolarità dovute probabilmente a cause che si aggiungono alla semplice eredità.

I fenomeni biologici, sebbene non definibili sempre con precisione matematica, non ci fanno pensare anch'essi ad una periodicità di effetti dovuta ad una periodicità di cause? E perciò entro i limiti d'una tale periodicità non dovrebbe forse verificarsi un'invariabilità nella legge ereditaria? Limitiamoci a queste semplici suggestioni senza approfondire un soggetto che ci condurrebbe troppo lontano.

* * *

Certo finchè studiamo dei fenomeni fisici di natura ereditaria sarà giustificato fare uso di nuclei appartenenti al ciclo chiuso. Ora, come già abbiamo accennato, ciò è di notevole importanza dal punto di vista analitico. Infatti alle equazioni integrali ed integro-differenziali corrispondenti a tali nuclei sono applicabili dei metodi di una notevole semplicità ed eleganza. Conviene perciò introdurre un'operazione da eseguirsi sulle funzioni la quale può esprimersi con simboli matematici mediante la formula

$$\int_x^y f(x, \xi)\varphi(\xi, y)d\xi$$

e che chiamasi la *composizione* delle funzioni $f$ e $\varphi$. Essa gode delle proprietà associativa e distributiva. Ora tutte le funzioni per le quali vale anche la proprietà commutativa *costituiscono un gruppo*, giacchè l'operazione stessa genera nuove funzioni che appartengono al gruppo, come appartengono al gruppo tutte quelle generate per combinazioni lineari a coefficenti costanti delle funzioni stesse. Tale gruppo chiamasi un *gruppo di funzioni permutabili*. Ora le equazioni integrali ed integro-differenziali, dipendenti da nuclei appartenenti ad uno stesso gruppo di funzioni permutabili, si risolvono partendo dalle soluzioni di equazioni algebriche o differenziali del tipo classico sviluppate in serie di potenze e sostituendo in esse alle potenze algebriche quelle che si chiamano potenze di composizione. Ma le soluzioni delle equazioni integrali ed integro-differenziali, ottenute mediante questa trasformazione, hanno, rispetto alle soluzioni delle equazioni classiche da cui si ricavano, un vantaggio notevole in quanto le serie calcolate sono illimitatamente convergenti anche se non lo sono quelle di partenza.

Esaminiamo ora i nuclei appartenenti al gruppo del *ciclo chiuso*. Essi formano un *gruppo di funzioni permutabili* nel senso sopra stabilito, onde si può applicare alle equazioni integro-differenziali ed integrali che si hanno nel caso della *eredità di tipo invariantivo* i metodi e l'analisi che abbiamo ora sommariamente esposto e risolvere così con grande facilità i numerosi problemi che si presentano.

Le operazioni di composizione e le funzioni permutabili, man mano che se ne esaminano le proprietà, si approfondiscono le questioni che ad esse si riattaccano, e che si procede alle estensioni che nascono spontaneamente dal loro studio, danno luogo ad una teoria che si svolge parallelamente a quella dell'algebra e del calcolo infinitesimale classico. Il Signor PÉRÈS ed altri autori hanno aggiunto alle primitive ricerche su questo soggetto dei capitoli interessanti che ho raccolto insieme al succitato autore in un volume. Esso dà un'idea dell'insieme di questi studî.

* * *

Tralasciamo questi sviluppi analitici e ritorniamo ad esaminare le vere e proprie questioni ereditarie, anzi esaminiamole in quello che esse hanno di più essenziale, cioè dal punto di vista energetico.

Questo è quanto andrò ora ad esporre e ciò che ritengo oggi nuovo, giacchè ha costituito la ricerca a cui mi sono consacrato in questi ultimi tempi e di cui ho pubblicato un saggio nell'ultimo fascicolo del « Journal de mathématiques ». Quale forma assume il principio di conservazione dell'energia, allorchè si considerano i fenomeni di tipo ereditario? Dei numerosi casi che devono prendersi in considerazione cominciamo da quello che si presenta sotto la forma più semplice ed elementare.

Immaginiamo un sistema meccanico avente un sol grado di libertà, la cui configurazione sia quindi individuata da un solo parametro $q$. I piccoli movimenti spontanei di un tale sistema dipenderanno dall'equazione differenziale ben nota.

$$\frac{d^2q(t)}{dt^2}+a^2q(t)=0.$$

Se noi supponiamo che la forza viva o energia cinetica del sistema sia

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dq(t)}{dt}\right)^2=T$$

e il potenziale delle forze interne sia

$$P=-E=-\tfrac{1}{2}a^2q^2,$$

l'equazione delle forze vive avrà la forma

$$d(T+E)=0$$

ossia

$$T+E=\text{cost.}$$

$E=\frac{1}{2}a^2q^2$ esprimerà l'energia potenziale interna del sistema.

Se il moto anzichè libero sarà forzato, l'equazione fondamentale si scriverà

$$\frac{d^2q(t)}{dt^2}+a^2q(t)=Q(t) \tag{2}$$

denotando con $Q(t)$ la forza esterna ed in questo caso avremo

$$d(T+E)=Qdt.$$

Questa equazione dice che il lavoro delle forze esterne va impiegato ad aumentare l'energia totale del sistema, cioè la somma della forza viva (energia cinetica) e dell'energia interna (energia potenziale). Supponiamo ora che il sistema sia soggetto ad azioni interne ereditarie, e per considerare il caso più semplice supponiamo ch'esse siano azioni ereditarie lineari. Dovremo allora aggiungere l'azione ereditaria al termine $a^2q$ che figura nel primo membro. Come abbiamo detto precedentemente questa azione ereditaria potrà scriversi

$$\int_0^{T_0}\Phi(\tau)q(t-\tau)d\tau$$

supponendo l'eredità di natura invariabile col tempo e supponendo che $T_0$ sia la sua durata.

Dovremo ora ammettere quest'azione ereditaria acceleratrice o ritardatrice? È facile persuadersi che essa opera in senso opposto dell'azione interna $a^2q(t)$ in modo che, come equazione generale da sostituirsi alla (2), dovremo assumere

$$\frac{d^2q(t)}{dt^2}+a^2q(t)+\int_0^{T_0}\Phi(\tau)q(t-\tau)d\tau=Q(t) \tag{3}$$

ove $\Phi(\tau)$ è una quantità essenzialmente negativa. Si ponga ora

$$a^2 + \int_0^{T_0} \Phi(\tau) d\tau = m$$

e l'equazione precedente diverrà

$$\frac{d^2 q(t)}{dt^2} + mq(t) - \int_0^{T_0} \Phi(\tau)[q(t) - q(t-\tau)] d\tau = Q(t). \tag{3'}$$

Un semplice ragionamento ci porta a concludere che $m$ è positivo. Infatti se $m$ fosse nullo, sopprimendo la forza esterna e prendendo $q(t) = q(t-\tau)$ si avrebbe $q'(t) = 0$ mentre dalla equazione precedente seguirebbe $q''(t) = 0$, onde $q$ non cambierebbe valore. Se $m$ fosse negativo risulterebbe $q''(t) > 0$, e perciò $q$ tenderebbe a crescere. Ambedue queste conseguenze contraddicono all'andamento dei fenomeni ereditarî.

Consideriamo il funzionale

$$E_p = \tfrac{1}{2} mq^2(t) - \tfrac{1}{2} \int_0^{T_0} \Phi(\tau) [q(t) - q(t-\tau)]^2 d\tau; \tag{I}$$

il suo differenziale potrà scriversi

$$mq(t)\delta q(t) - \int_0^{T_0} \Phi(\tau) [q(t) - q(t-\tau)] d\tau \cdot \delta q(t)$$
$$+ \int_0^{T_0} \Phi(\tau) [q(t) - q(t-\tau)] \delta q(t-\tau) d\tau.$$

Il primo termine che, nella classificazione dei differenziali dei funzionali di cui abbiamo parlato sopra, prende il nome datogli dal sig. PAUL LÉVY di *parte irregolare del differenziale*, è il prodotto della forza totale interna attuale cambiata di segno per il differenziale $\delta q(t)$ dello spostamento attuale. Potremo dunque chiamare $-E_p$ *il potenziale dell'insieme di tutte le azioni interne.*

$E_p$ è un funzionale il quale dipende dallo stato attuale del sistema e da tutti gli stati che ha attraversato il sistema nell'intervallo di tempo $T_0$ che ha preceduto l'istante attuale. Ora dal punto di vista ereditario il sistema si trova nelle stesse condizioni in due istanti diversi quando, non solo i parametri che definiscono lo stato del sistema hanno gli stessi valori nei due istanti, ma sono rispettivamente uguali tra loro anche i valori dei parametri stessi nei due intervalli di tempo d'ampiezza $T_0$ che precedono i due detti istanti.

$E_p$ è dunque un funzionale che riprende il valore iniziale allorchè il sistema ritorna, dal punto di vista ereditario, nelle stesse condizioni iniziali. Nella equazione (3′) la forza interna attuale è scritta sotto la forma

$$-mq(t) + \int_0^{T_0} \Phi(\tau) [q(t) - q(t-\tau)] d\tau;$$

ora quest'espressione può interpretarsi dicendo che il contributo di forza interna attuale proveniente dal tempuscolo $(\tau, \tau + d\tau)$ è dato da

$$\Phi(\tau)\,[q(t) - q(t-\tau)]$$

ossia è proporzionale alla differenza tra il valore attuale del parametro $q$ ed il suo valore nell'istante $t-\tau$. Ciò modifica il concetto di azione elementare ereditaria che avevamo precedentemente esposto. Fu appunto questa modificazione del concetto primitivo di *contributo elementare ereditario*, al quale abbiamo già alluso precedentemente, che diede luogo alle più feconde conseguenze.

Noi abbiamo detto che $\Phi(\tau)$ deve assumersi negativo, ma vi è da ricordare un'altra ipotesi sopra questa quantità. Siccome l'azione ereditaria tende ad estinguersi col tempo, così il valore assoluto di $\Phi(\tau)$ deve andare continuamente decrescendo col crescere di $\tau$; quindi potremo scrivere

$$\Phi(\tau) < 0 \quad , \quad (0 \leq \tau < T_0) \quad ; \quad \Phi(T_0) = 0 \quad ; \quad \Phi'(\tau) > 0 \quad , \quad (0 < \tau < T_0)$$

* * *

Abbiamo adesso tutti gli elementi per stabilire la relazione energetica fondamentale e faremo uso per ottenerla di un artificio che mi è stato suggerito da uno studio di natura diversa, ma che rientra sempre nel campo delle questioni ereditarie.

È possibile infatti costruire sopra basi matematiche una teoria delle fluttuazioni che si osservano nei numeri di individui di specie biologiche diverse, allorchè, vivendo esse in un medesimo ambiente, esercitano le une sulle altre delle azioni di aiuto o di distruzione, il che avviene, per esempio, quando alcune specie si nutriscono degli individui di altre o si disputano uno stesso nutrimento. Un primo esame conduce a regolare tali fluttuazioni mediante equazioni differenziali non uguali, ma simili alle equazioni differenziali della dinamica classica. Un esame più profondo conduce invece a riconoscere un carattere ereditario nelle azioni che sono in gioco. Ed infatti la maggiore o minore quantità di nutrimento ingerita oggi dagli individui di una specie ha un'azione che si manifesta solo dopo un certo tempo sulla quantità e qualità degl'individui della specie stessa.

Si è così condotti a modificare le equazioni primitive di natura differenziale sostituendole con equazioni integro-differenziali. Le leggi delle fluttuazioni che si ricavavano dalle equazioni differenziali in parte si conservano, in parte si trasformano impiegando alcuni artifici analitici.

Questi stessi artifici possono adoperarsi (ed anzi con maggior successo) nel caso della ordinaria dinamica ereditaria ed anche nello studio di altri fenomeni fisici sempre di natura ereditaria. Sono appunto questi artifici di cui faremo uso per ottenere il principio energetico che vogliamo stabilire.

* * *

Riprendiamo perciò l'equazione (3'). Se noi vogliamo ottenere il lavoro della forza esterna $Q$ durante il tempuscolo $dt$ dovremo calcolare

$$Q(t)q'(t)dt$$

e questo si esprimerà sotto la forma

$$q''(t)q'(t)dt+mq(t)q'(t)dt-q'(t)dt\int_0^{T_0}\Phi(\tau)\,[q(t)-q(t-\tau)]d\tau.$$

I primi due termini, come risulta ovviamente dall'analisi che conduce al principio delle forze vive, sono due differenziali esatti e cioè insieme formano

$$d\,\tfrac{1}{2}\,[q'^2(t)+mq^2(t)].$$

Il terzo termine non è un differenziale esatto ma differisce da

$$d[-\tfrac{1}{2}\int_0^{T_0}\Phi(\tau)\,[q(t)-q(t-\tau)]^2d\tau]$$

per la quantità

$$dt\cdot\int_0^{T_0}\Phi(\tau)\,[q(t)-q(t-\tau)]\,\frac{dq(t-\tau)}{dt}\,d\tau.$$

Ora quest'espressione può scriversi

$$dt\cdot\tfrac{1}{2}\int_0^{T_0}\Phi(\tau)\,\frac{d[q(t)-q(t-\tau)]^2}{d\tau}\,d\tau$$

e, con un'integrazione per parti, osservando che,

$$\Phi(T_0)=0 \qquad , \qquad (q(t)-q(t-\tau))_{\tau=0}=0,$$

si trasforma in

$$-dt\cdot\tfrac{1}{2}\int_0^{T}\Phi'(\tau)\,[q(t)-q(t-\tau)]^2d\tau,$$

onde otterremo finalmente

$$d\{\tfrac{1}{2}\,q'^2(t)+\tfrac{1}{2}\,mq^2(t)-\tfrac{1}{2}\int_0^{T_0}\Phi(\tau)\,[q(t)-q(t-\tau)]^2\,d\tau\}+$$
$$+\frac{dt}{2}\int_0^{T_0}\Phi'(\tau)\,[q(t)-q(t-\tau)]^2\,d\tau=Q(t)dq(t).$$

E siccome (vedi (I))

$$\tfrac{1}{2}\,q'^2(t)=T \qquad , \qquad \tfrac{1}{2}\,mq^2(t)-\tfrac{1}{2}\int_0^{T_0}\Phi(\tau)\,[q(t)-q(t-\tau)]^2d\tau=E_p$$

e possiamo porre

$$E_{\mathcal{Q}} = \frac{1}{2}\int_0^{T_0} \Phi'(\tau)\,[q(t)-q(t-\tau)]^2 d\tau$$

avremo

$$d(T+E_p)+E_{\mathcal{Q}}\,dt = Q(t)dq(t).$$

Ora $E_{\mathcal{Q}}$ è una quantità positiva, dunque il lavoro delle forze esterne supera sempre l'incremento delle quantità

$$T+E_p.$$

Se noi scriviamo $T+E_p=E_m$ ed integriamo tra due tempi $t_0$ e $t$, dall'equazione precedente risulterà

$$\text{(III)} \qquad E_m - E_m^0 + \int_{t_0}^{t} E_{\mathcal{Q}}\,dt = L,$$

ove $E_m$ e $E_m^0$ sono i valori di $E_m$ ai tempi $t_0$ e $t$, e $L$ è il lavoro delle forze esterne.

È questa la *equazione fondamentale energetica che volevamo stabilire.*

Chiamiamo per definizione $E_p$ *l'energia potenziale interna ed* $\mathrm{E_m}$ *l'energia meccanica.* Si avrà allora il principio energetico:

*Il lavoro delle forze esterne oltrepassa sempre la variazione dell'energia meccanica di una quantità positiva.* Se $L$ è positivo questa legge può enunciarsi:

*Il lavoro delle forze esterne non si trasforma completamente in energia meccanica, ma resta sempre una parte residua positiva del lavoro stesso che non si trasforma in energia meccanica. Se mancano forze esterne (e quindi* $\mathrm{L}=0$*) l'energia meccanica diminuisce costantemente e, se il lavoro delle forze esterne è negativo, l'energia meccanica si trasforma solo in parte in lavoro esterno.*

* * *

Supponiamo ora che il sistema ritorni dopo un certo tempo alle condizioni iniziali (dal punto di vista ereditario), allora l'energia potenziale riprenderà il valore primitivo, onde avremo che, *se alla fine di un certo periodo di tempo, il sistema ritorna, dal punto di vista ereditario, nelle stesse condizioni iniziali, le forze esterne eseguiscono un lavoro positivo.* In questo caso nulla si cambia dal punto di vista meccanico nel sistema, perciò questo lavoro positivo è un lavoro dissipato dal punto di vista meccanico. Esso si calcola subito dalla formula (III) prendendo $E_m=E_m^0$, onde sarà

$$\int_{t_0}^{t} E_{\mathcal{Q}}\,dt$$

il lavoro meccanico dissipato. Naturalmente secondo i principî della conservazione dell'energia *esso deve essersi trasformato in altre forme di energia.*

E allora può domandarsi: se il ciclo percorso dal sistema non è chiuso, cioè se il sistema non ritorna al tempo $t$ nelle stesse condizioni (dal punto di vista ereditario) nelle quali si trovava al tempo $t_0$, la quantità

$$\int_{t_0}^{t} E_{\varrho}\, dt$$

ci darà sempre una quantità di lavoro meccanico trasformato in altre forme di energia? Noi non possiamo affermarlo. Bisogna a questo proposito intendersi bene sul significato delle parole delle quali abbiamo fatto uso. Non è infatti che *per definizione, come è stato detto esplicitamente sopra*, che $E_p$ si è chiamata l'*energia potenziale interna* ed $E_m$ *l'energia meccanica.* Ciò che preme di mettere in luce è che tali definizioni sono compatibili con i principî della energetica e che abbiamo mostrato *l'esistenza di un funzionale, di cui si è data l'espressione analitica, dipendente dalle condizioni del sistema dal punto di vista ereditario, tale che il lavoro delle forze esterne nel passaggio da uno stato ad un altro ne oltrepassa sempre le variazioni.*

Il funzionale considerato non è il solo che goda di queste proprietà.

* * *

Il risultato ottenuto conduce a molte conseguenze ed esso può ancora estendersi notevolmente.

In primo luogo si dimostra che *i moti spontanei sono limitati e vanno indefinitamente smorzandosi, o mediante oscillazioni, o mediante moti asintotici.*

Si può poi estendere i risultati al caso di un sistema avente un grado qualunque di libertà. La estensione può farsi con un'analisi delicata, introducendo nuove condizioni e nuovi postulati che generalizzano ed integrano quelli posti nel caso di un solo grado di libertà. Anche i sistemi continui possono studiarsi dallo stesso punto di vista. In particolare è interessante lo studio dei solidi elastici allorchè si tien conto dell'eredità. Il procedimento il quale conduce alla relazione energetica fondamentale non differisce essenzialmente da quello di cui abbiamo esposto poco fa le basi fondamentali.

Oltre all'equazione energetica, che abbiamo precedentemente ottenuta, possono aversene anche altre. Ciò è legato ad alcune considerazioni generali sulla eredità che brevemente riferiremo. Sia $\varrho$ un parametro il cui valore al tempo $t$ dipende linearmente ed ereditariamente dal parametro $q$, cioè sia

$$\varrho(t) = aq(t) + \int_{-\infty}^{t} q(\tau)\, \Phi(t-\tau)\, d\tau. \tag{4}$$

La funzione $q(\tau)$ individua la *storia* del parametro $q$ (storia primitiva) e la funzione $\varrho(t)$ la *storia* del parametro $\varrho$ (storia ereditaria). In questo caso la eredità si dirà *completa*. Se $\Phi$ si annulla per valori dell' argomento eguali o superiori a $T_0$, come abbiamo veduto precedentemente, la eredità è *limitata alla durata* $T_0$ ed abbiamo

$$(4') \qquad \varrho(t) = aq(t) + \int_{t-T_0}^{t} q(\tau)\,\Phi(t-\tau)\,d\tau.$$

Ma se la eredità anteriore ad un istante $t_0$ è trascurabile l'equazione (4) assumerà la forma

$$(4'') \qquad \varrho(t) = aq(t) + \int_{t_0}^{t} q(\tau)\,\Phi(t-\tau)\,d\tau.$$

In questo caso la eredità si dirà *posteriore* all' istante $t_0$ e l' equazione integrale precedente potrà invertirsi e si otterrà

$$q(t) = \frac{1}{a}\,\varrho(t) + \int_{t_0}^{t} \varrho(\tau)\varphi(t-\tau)\,d\tau$$

ove la funzione $\varphi$ si chiama il *nucleo risolvente* dell' equazione (4″). Si avrà dunque che, nello stesso modo che la *storia primitiva posteriore a* $t_0$ *individua quella ereditaria, così la storia ereditaria posteriore a* $t_0$ *individua quella primitiva.*

La eredità posteriore a $t_0$ può quindi completamente invertirsi e si può considerare $q$ come dipendente ereditariamente da $\varrho$.

Analoghe proprietà non si verificano allorchè la eredità è completa o limitata, così per esempio, in questi casi ad una stessa storia ereditaria possono corrispondere diverse storie primitive, a meno che non si pongano alcune condizioni restrittive.

L'essere l'eredità primitiva posteriore a $t_0$, non esclude che essa possa essere anche limitata ad una certa durata $T_0$, però la eredità invertita può non essere limitata alla durata $T_0$, nè essere in alcun modo limitata.

Tutte queste diverse classificazioni e proprietà ereditarie portano a forme diverse di equazioni energetiche.

Così considerando l' eredità posteriore ad un certo istante può estendersi la relazione energetica precedentemente ottenuta ed invertendo l' eredità può ottenersene una di forma diversa.

Come esempio di un' altra forma di relazione energetica esaminiamo i fenomeni elettromagnetici di natura ereditaria.

Prendiamo le equazioni fondamentali di Maxwell nel caso il più semplice dei mezzi isotropi ed omogenei. Per passare dal caso ordinario a quello in cui si tien conto della eredità si può sostituire alle due relazioni

$$P_e(t) = \varepsilon F_e(t) \qquad , \qquad P_m(t) = \mu F_m(t)$$

ove $P_e$ e $P_m$ denotano i vettori polarizzazione elettrica e polarizzazione magnetica e $F_e$ e $F_m$ i vettori forza elettrica e forza magnetica nell'istante $t$, le relazioni di tipo integrale

$$P_e(t) = \varepsilon F_e(t) + \int_0^{T_0} \mathfrak{F}(\tau) F_e(t-\tau) d\tau \quad , \quad P_m(t) = \mu F_m(t) + \int_0^{T_0} \Phi(\tau) F_m(t-\tau) d\tau .$$

In queste equazioni i coefficienti di eredità $\mathfrak{F}(\tau)$ e $\Phi(\tau)$ debbono essere positivi e decrescenti ed annullarsi per $t = T_0$, ammesso che $T_0$ sia la durata dell'eredità, allorchè si assumono come storie primitive quelle della forza elettrica e della forza magnetica e come storie ereditarie quelle delle corrispondenti polarizzazioni.

Sostituendo nelle equazioni di Maxwell le precedenti espressioni delle polarizzazioni si ottengono subito le equazioni integro-differenziali che esprimono l'andamento dei fenomeni elettromagnetici nel caso ereditario.

Ora per stabilire la legge fondamentale energetica si può applicare alle equazioni di Maxwell il procedimento ben noto del POYNTING. Bisogna allora calcolare la somma dei prodotti scalari

$$\frac{dP_e}{dt} \times F_e \quad , \quad \frac{dP_m}{dt} \times F_m$$

la quale si esprime, eseguiti tutti i calcoli e le trasformazioni necessarie, mediante la formula

$$\frac{d}{dt}(F_e + E_m) - E_{\mathcal{Q}}$$

avendo posto

$$E_e = \frac{\varepsilon}{8\pi} F_e^2 + \int_0^{T_0} \frac{\mathfrak{F}(\tau)}{8\pi} F_e^2(t-\tau) d\tau$$

$$E_m = \frac{\mu}{8\pi} F_m^2 + \int_0^{T_0} \frac{\Phi(\tau)}{8\pi} F_m^2(t-\tau) d\tau$$

$$E_{\mathcal{Q}} = -\frac{1}{8\pi} \int_0^{T_0} \{ \mathfrak{F}'(\tau)[F_e(t-\tau) - F_e(t)]^2 + \Phi'(\tau)[F_m(t-\tau) - F_m(t)]^2 \} d\tau$$

e ove con

$$F_e^2(t), \qquad F_m^2(t), \qquad [F_e(t-\tau) - F_e(t)]^2, \qquad [F_m(t-\tau) - F_m(t)]^2$$

si intendono rispettivamente i quadrati dei tensori dei vettori

$$F_e(t), \qquad F_m(t), \qquad F_e(t-\tau) - F_e(t), \qquad F_m(t-\tau) - F_m(t).$$

Se *per definizione* chiamiamo $E_e$ l'*energia potenziale unitaria elettrica* ed $E_m$ l'*energia potenziale unitaria magnetica*, mentre chiamiamo $E_{\mathcal{Q}}$ la *energia di dissipazione elettromagnetica unitaria dovuta all'eredità*, queste quantità saranno tutte positive ed il flusso di energia elettromagnetica che penetra in un intervallo di tempo $(t_0, t)$ attraverso il contorno di un campo $S$ sarà eguale a

$$\int_S (E_e + E_m) dS - \int_S (E_e^0 + E_m^0) dS + \int_{t_0}^{t} dt \int_S E_{\mathcal{Q}} dS + J$$

denotando con $J$ il calore Joule (misurato in energia meccanica) e avendo messo un apice 0 per denotare i valori iniziali (al tempo $t_0$) di $E_e$ ed $E_m$. Da qui segue il teorema: *il flusso dell'energia elettromagnetica attraverso il contorno di un campo supera la somma dell'energia Joule e dell'incremento dell'energia elettro-magnetica del campo di una quantità positiva* o, in altri termini, *solo una parte dell'energia elettro-magnetica che penetra attraverso il contorno accresce l'energia elettro-magnetica del campo e si trasforma in calore Joule.* La parte che si dissipa (e che in generale verrà trasformata anch'essa in calore) viene calcolata dalla formula:

$$\int_t^t dt \int_S E_\partial \, dS.$$

Ciò potremo asserire almeno tutte le volte che il sistema torna dal punto di vista ereditario nelle condizioni iniziali.

Pur prescindendo dalle definizioni attribuite ad $E_e$, $E_m$, $E_\partial$, anche in questo caso resta dimostrata per ogni campo l'*esistenza di un funzionale dipendente dalle condizioni del sistema dal punto di vista ereditario, le cui variazioni in ogni intervallo di tempo aggiunte all'energia Joule sono sempre superate dall'energia elettro-magnetica che penetra nel campo dal suo contorno.*

Questo funzionale non è il solo che gode di tali proprietà. Infatti potrebbe calcolarsene un altro (analogo a quello trovato per i sistemi dinamici) dal quale il primo differisce perchè in questo figurano soltanto i valori che individuano lo stato del sistema nel periodo di durata dell'eredità, mentre nell'altro compariscono le differenze tra gli elementi che definiscono lo stato del sistema nell'istante attuale e quelli che lo individuano nel tempo passato.

* * *

Tutto quanto abbiamo detto sin qui relativamente alla energetica ereditaria si riferisce al caso in cui essa sia *lineare*. Ora è del maggiore interesse vedere se i principî stabiliti sono estensibili al caso dell'eredità non *lineare*. Evidentemente tale estensione va riservata al caso dei sistemi dinamici, giacchè per l'elettro-magnetismo conviene rimanere sempre nel caso lineare.

Ma se esaminiamo l'estensione stessa dal punto di vista analitico si riconosce facilmente che essa ci conduce ad un impiego molto più largo dei metodi del calcolo funzionale e dei suoi elementi fondamentali di quanto non sia stato fatto finora.

È forse l'esempio più istruttivo che si abbia del loro uso e la prova più sicura della facilità colla quale possono adoperarsi e della loro utilità. Infatti conviene valersi, fra le altre cose, dei differenziali dei funzionali, giovandosi ad un tempo della loro parte regolare e di quella non regolare ed applicare lo sviluppo funzionale analogo a quello di Taylor. Mi riferivo precisamente a questo al principio della conferenza.

Noi non staremo a svolgere nei suoi particolari tale estensione la quale ci condurrebbe troppo lontano. Diremo solo che, conviene partire dalle equazioni dinamiche sotto la seconda forma di Lagrange, ed ammettere l'esistenza del potenziale ereditario dipendente dalla differenza dei valori attuali dei parametri che individuano lo stato del sistema e dei valori dei parametri stessi in tutti gli istanti di un intervallo di tempo che precede quello attuale, di ampiezza eguale alla durata dell'eredità. Questo potenziale è un funzionale il cui differenziale si suppone regolare. È possibile allora modificare le equazioni di Lagrange in modo da tener conto dell'eredità. Se in seguito noi applichiamo a queste equazioni il classico metodo che conduce al principio delle forze vive noi otteniamo una relazione differenziale la quale esprime il lavoro elementare delle forze esterne mediante il differenziale della somma dell'energia cinetica e di un funzionale dipendente dallo stato del sistema dal punto di vista ereditario. A questo differenziale è aggiunto un termine che esprime l'energia di dissipazione. L'operazione più difficile è la sua trasformazione, la quale può ottenersi mediante la costruzione di un nuovo funzionale *dipendente in modo speciale dal valore d'una funzione in un punto determinato e di cui si conosce la parte non regolare del differenziale.* Esso ci dà il funzionale di dissipazione che, in virtù di alcuni postulati, risulta positivo,

I teoremi quindi che abbiamo enunciati nel caso dell'eredità lineare possono senz'altro estendersi al caso generale.

Un esempio particolare di notevole interesse lo abbiamo allorchè il funzionale che esprime il potenziale ereditario è sviluppabile in serie analoga a quella di Taylor, il che ci conduce alle *espressioni analitiche complete* e del *potenziale ereditario stesso* e della *energia di dissipazione.*

* * *

Ritengo così di avere dato un'idea generale dei fenomeni ereditarî per quella parte che può chiamarsi la *teoria pura dei fenomeni stessi* la quale si basa sulla semplice ipotesi della esistenza di azioni che dipendono, oltre che dal presente, anche dal passato. L'esame di tali azioni costituisce a mio avviso un passo nello studio approssimativo dei fenomeni naturali.

Ma evidentemente se ciò avvicina la teoria analitica ai risultati delle osservazioni, questi sono ben lungi dal venire completamente spiegati in tutti i loro particolari. Molti fatti sfuggono alla teoria. Essi alla loro volta non vi rientreranno, almeno parzialmente, se non aggiungendo nuove ipotesi a quelle già fatte che riescano a stringere più da vicino la realtà. L'avanzarsi dunque per questa via, come in tutte quelle secondo cui procede la filosofia naturale, è e continuerà ad essere il risultato di successive approssimazioni.

La teoria si serve delle equazioni integro-differenziali e delle equazioni funzionali che esprimono matematicamente il fenomeno; si svolge con lo studio

analitico di esso basato sulla dottrina del calcolo funzionale; stabilisce un principio fondamentale: quello del ciclo chiuso, il quale dal punto di vista matematico apre la via all'impiego dei metodi delle funzioni permutabili e della composizione. Infine la teoria stessa procede nel campo dell'energetica riuscendo ad esprimere mediante dei funzionali l'energia di dissipazione dovuta all'eredità nel caso dei cicli chiusi e dando un seguito di proposizioni compatibili con le leggi generali dell'energetica.

Le più importanti di esse provano l'esistenza, in ogni caso, di funzionali, le cui variazioni aggiunte a quelle dell'energia cinetica (fenomeni dinamici) o del calore Joule (fenomeni elettro-magnetici) sono sempre superati dal lavoro delle forze esterne o dall'energia che penetra dall'esterno nel campo in cui il fenomeno si svolge.

Queste diverse proposizioni esprimono in forma sintetica il modo di prodursi dei fenomeni ereditarî e ne caratterizzano l'andamento generale.

HERMANN WEYL

# KONTINUIERLICHE GRUPPEN UND IHRE DARSTELLUNGEN DURCH LINEARE TRANSFORMATIONEN

In den letzten Jahren hat die Theorie der kontinuierlichen Gruppen und ihrer Darstellungen durch lineare Transformationen von mathematischer Seite her einen neuen Aufschwung genommen und zugleich hat sich für die Darstellungstheorie in der Quantenphysik ein ganz neues umfassendes Anwendungsgebiet aufgetan. Darüber soll dieser Vortrag einen kurzen Bericht erstatten.

Der Begriff der *Gruppe*, einer der ältesten und tiefsten mathematischen Begriffe überhaupt, ist durch Abstraktion hervorgegangen aus dem der *Transformationsgruppe*, indem man die Transformationen zu Elementen völlig gleichgültiger Natur degradierte und nur auf das Gesetz achtete, nach dem aus zwei Transformationen durch Zusammensetzung, durch Hintereinanderausführung eine neue entsteht. Stellt man das Gruppenschema oder die abstrakte Gruppe an den Anfang, so findet man von ihr den Weg zurück zu den konkreten Transformationsgruppen durch den Prozess der *Verwirklichung*: Eine Verwirklichung liegt vor, wenn jedem Element $s$ der Gruppe eine Transformation $U(s)$ zugeordnet ist, derart dass der Zusammensetzung der Gruppenelemente die Zusammensetzung der zugehörigen Transformationen parallel geht

$$U(st) = U(s)\, U(t). \tag{1}$$

Die Transformationen sind eineindeutige Abbildungen eines gewissen kontinuierlichen oder diskontinuierlichen Punktfeldes. Das Problem der Transformationsgruppen zerlegt sich dadurch in zwei getrennte wesensverschiedene Aufgaben: 1) Auffindung und Untersuchung der nach ihrer Struktur verschiedenen abstrakten Gruppen; 2) Untersuchung der verschiedenen möglichen Verwirklichungen einer gegebenen abstrakten Gruppe durch Transformationen eines gegebenen Punktfeldes. — Die Elemente einer Gruppe können in endlicher oder unendlicher Zahl vorhanden sein, ja sie können zu einer kontinuierlichen Mannigfaltigkeit zusammengeschmolzen sein. So wenig wie in der allgemeinen Mengenlehre, ist freilich eine saubere Aufteilung in diskontinuierliche und kontinuierliche Gruppen möglich. Aber eine tiefer eindringende Theorie existiert nur für die *endlichen* auf der einen, die *kontinuierlichen* Gruppen auf der andern Seite.

Zu einer mathematisch höchst fruchtbaren Fragestellung gelangt man, wenn

man von den Transformationen, welche zur Verwirklichung einer gegebenen Gruppe dienen sollen, verlangt, dass sie homogene lineare Transformationen seien. Wir sprechen dann von *Darstellung* statt von Verwirklichung einer Gruppe. Eine $n$-dimensionale Darstellung $\mathfrak{D}$ von $\mathfrak{g}$ (Darstellung vom Grade $n$) liegt also vor, wenn jedem Element $s$ der Gruppe eine lineare Abbildung $U(s)$ des $n$-dimensionalen Vektorraumes $\mathfrak{R}$ so zugeordnet ist, dass allgemein (1) besteht. Wir sagen kurz, $s$ *induziert* im Darstellungsraum $\mathfrak{R}$ die Abbildung $U(s)$. Legen wir ein bestimmtes Koordinatensystem $x_i$ zugrunde, so erscheint die Abbildung in der Gestalt

$$x_i' = \sum_{k=1}^{n} u_{ik}(s) x_k \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

mit den Darstellungskomponenten $u_{ik}(s)$. Wird das Koordinatensystem durch ein anderes ersetzt, das aus ihm durch die Transformation mit der Matrix $A$ hervorgeht, so erscheint dieselbe Abbildung, die vorher durch die Matrix

$$U(s) = \| u_{ik}(s) \|$$

repräsentiert wurde, jetzt als die Matrix $AU(s)A^{-1}$. Die Darstellungen

$$s \rightarrow U(s), \qquad s \rightarrow AU(s)A^{-1}$$

heissen *äquivalent* zueinander. Sie sind im Grunde nicht verschieden, sondern weichen nur durch die Wahl des Koordinatensystems, durch die Orientierung voneinander ab. Mit der Darstellung der Gruppe $\mathfrak{g}$ ist zugleich eine Darstellung für jede *Untergruppe* von $\mathfrak{g}$ gegeben.

Das einfachste *Beispiel* ist die einparametrige *Gruppe* $\mathfrak{d}_2$ der Drehungen einer Ebene oder eines Kreises in sich. In der komplexen $x$-Ebene lautet die Drehung um den Winkel $\varphi$

$$x' = e^{i\varphi} x.$$

Bei Zusammensetzung verhält sich der Drehwinkel $\varphi$ additiv. Ordnen wir ihr, unter $m$ eine feste ganze Zahl verstehend, die Drehung um den Winkel $m\varphi$ zu:

$$x' = e^{im\varphi} x,$$

so erhalten wir offenbar eine eindimensionale Darstellung $\mathfrak{D}^{(m)}$ der Gruppe.

Für die *Gruppe* $\mathfrak{d}_3$ der *Drehungen im dreidimensionalen Raum* liefern die Kugelfunktionen $l^{\text{ter}}$ Ordnung eine Darstellung $\mathfrak{D}_l$ vom Grade $2l+1$. Denn diese Funktionen bilden eine lineare Schar oder einen Vektorraum von $2l+1$ Dimensionen, und eine Kugelfunktion $l^{\text{ter}}$ Ordnung geht in eine ebensolche über, wenn ihre Argumente, die drei Raumkoordinaten $xyz$, beliebigen orthogonalen Transformationen $s$, einem Element von $\mathfrak{d}_3$, unterworfen werden. Unter Auszeichnung der $z$-Achse können wir bekanntlich die Basis der Kugelfunktionen $Y_l^{(m)}$ $(m = l, l-1, \ldots, -l)$ so wählen, dass die Drehung des Raumes um die $z$-Achse durch den Winkel $\varphi$ die Funktion $Y_l^{(m)}$ mit $e^{im\varphi}$ multipliziert. Das Koordina-

tensystem im Darstellungsraum von $\mathfrak{D}_l$ ist damit so gewählt, dass $\mathfrak{D}_l$, wenn man die $\mathfrak{d}_3$ auf die Untergruppe $\mathfrak{d}_2$ der Drehungen um die $z$-Achse einschränkt, in $2l+1$ eindimensionale Darstellungen $\mathfrak{D}^{(m)}$ von $\mathfrak{d}_2$ zerfällt mit den Werten $m=l,\ l-1, \dots, -l$.

Der Begriff der Darstellung ist die natürliche Grundlage für einen vernünftigen, nicht durch formale Spezialisierungen eingeengten *Tensor- und Invariantenbegriff.* $\mathfrak{g}$ sei die Gruppe, welche im Sinne von Kleins Erlanger Programm gleichberechtigte Koordinaten-Systeme in dem zu studierenden Raum-Medium miteinander verknüpft, $\mathfrak{h}: s \to U(s)$ sei eine $n$-dimensionale Darstellung von $\mathfrak{g}$. *Eine kovariante Grösse von der Art* $\mathfrak{h}$ *ist eine solche, die relativ zum räumlichen Koordinatensystem durch* n *Zahlen festgelegt wird, so zwar, dass die Komponenten* $\mathrm{a_i}$ *derselben in irgend zwei Koordinatensystemen, die durch* s *ineinander übergehen, durch die Transformation* U(s) *miteinander zusammenhängen.* Handelt es sich um den vierdimensionalen, mit einem Zentrum versehenen affinen Raum, ist $\mathfrak{g}$ also die Gruppe der homogenen linearen Transformationen in 4 Dimensionen, so bilden z. B. die schiefsymmetrischen Tensoren 2. Stufe in diesem Raum das Substrat einer 6 dimensionalen Darstellung von $\mathfrak{g}$. Denn ein willkürlicher solcher Tensor hat 6 voneinander linear unabhängige Komponenten, und der Begriff ist invariant gegenüber der Wahl des Koordinatensystems. Die 6 Tensorkomponenten erfahren unter dem Einflusse einer beliebigen Koordinatentransformation $s$ des Raumes eine davon abhängige lineare Transformation $U$ unter sich, die nach dem Darstellungsgesetz (1) mit $s$ verknüpft ist. Allgemein sind so die *Tensoren von bestimmter Stufe, welche bestimmten Symmetrie-Bedingungen genügen,* das Substrat einer gewissen Darstellung $\mathfrak{h}$ von $\mathfrak{g}$; jene Tensoren selbst sind kovariante Grössen von der Art $\mathfrak{h}$. Es sieht nach den Erfahrungen der Physik so aus, als gäbe es im affinen zentrierten Raum *keine andern kovarianten Grössen, als durch Symmetrie-Forderungen eingeschränkte Tensoren.* Mit einer gewissen gleich zu erwähnenden Nebenbedingung ist dieser Satz in der Tat richtig; in ihm erblicke ich die Rechtfertigung dafür, dass man in der Physik neben den skalaren nur tensorielle Grössen betrachtet hat. Der mathematisch natürliche Begriff, welcher dem Tensorkalkül zugrunde liegt, ist aber der der kovarianten Grösse, welcher nicht nur auf die affine Gruppe, sondern auf irgend eine Gruppe $\mathfrak{g}$ anwendbar bleibt, selbst wenn diese bloss in abstracto gegeben ist.

Um den Zusammenhang mit der Invariantentheorie aufzuzeigen, betrachte man etwa die Gruppe $\mathfrak{c}=\mathfrak{c}_2$ aller unimodularen linearen Transformationen von zwei Variablen $\xi, \eta$. Sind z. B. $f, g$ zwei willkürliche Formen von $\xi$ und $\eta$ der Ordnung $m$, bezw $n$, so ist eine *Invariante* $I$ eine ganze rationale Funktion der Koeffizienten $a_i$ von $f$ und $b_k$ von $g$, homogen der Ordnung $\mu$ in $a$, $\nu$ in den $b$. Uebt man auf die Variablen $\xi, \eta$ eine Transformation $s$ von $\mathfrak{c}$ aus, so verwandeln sich $f, g$ in Formen $f', g'$ derselben Ordnung mit andern Koeffi-

zienten. Setzt man in $I$ die neuen Koeffizienten ein, so soll sich dadurch der Wert von $I$ nicht ändern, welches auch die ausgeführte Transformation $s$ der Gruppe $\mathfrak{c}$ war. Die Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_m$ der willkürlichen Form $m^{\text{ter}}$ Ordnung $f$ erfahren unter dem Einfluss der Variablentransformation $s$ ihrerseits eine von $s$ abhängige Transformation, die in ihrer Abhängigkeit von $s$ eine bestimmte Darstellung der Gruppe $\mathfrak{c}$ liefert. Dasselbe gilt für die sämtlichen Monome $\mu^{\text{ter}}$ Ordnung dieser Koeffizienten, desgleichen für die sämtlichen Monome, welche $\mu^{\text{ter}}$ Ordnung in den $a$, $\nu^{\text{ter}}$ Ordnung in den Koeffizienten $b$ einer zweiten willkürlichen Form $g$ von der $n^{\text{ten}}$ Ordnung sind. Diese Monome sind das Substrat einer Darstellung $\mathfrak{H}$ von $\mathfrak{g}$, welche durch die Ordnungszahlen $m, n$; $\mu, \nu$ vollständig bestimmt ist. Unser Polynom $I$ ist eine lineare Kombination der erwähnten Monome. Aus diesem Beispiel abstrahieren wir den allgemeinen natürlichen Invariantenbegriff. *Von einer abstrakten Gruppe* $\mathfrak{g}$ *sei die Darstellung* $\mathfrak{H}: \mathrm{s} \to \mathrm{U(s)}$ *im* n*-dimensionalen Raum* $\mathfrak{R}$ *mit den Variablen* $\mathrm{x_i}$ *gegeben; eine Linearform der* $\mathrm{x_i}$ *heisst eine Invariante im Darstellungsraum* $\mathfrak{R}$ *von* $\mathfrak{H}$, *wenn sie ungeändert bleibt bei Ausübung aller Transformationen* $\mathrm{U(s)}$. Die Hauptfrage, welche man hier stellen kann, ist die nach der Anzahl der linear unabhängigen Invarianten im Raume der gegebenen Darstellung $\mathfrak{H}$.

Nachdem ich Ihnen so die Darstellungstheorie als das Fundament wichtiger, sonst schon geläufiger mathematischer Gedankenbildungen gezeigt habe, zähle ich zunächst ihre wichtigsten Grundbegriffe auf.

1. *Zerfall.* Eine lineare Transformation $A$ der $m$ Variablen $x_i$ zusammen mit einer Transformation $B$ der $n$ Variablen $y_k$ ist eine Transformation $A, B$ der $m+n$ Variablen

$$x_1, \ldots, x_m, \; y_1, \ldots, y_n.$$

Durch diese additive Komposition entsteht aus einer $m$-dimensionalen Darstellung $\mathfrak{G}: s \to U(s)$ und einer $n$-dimensionalen $\mathfrak{H}: s \to V(s)$ die $m+n$-dimensionale $\mathfrak{G}+\mathfrak{H}: s \to U(s), V(s)$, die ihrerseits in die beiden Darstellungen $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ zerfällt. In ihr sind die beiden Darstellungen $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$, die nichts miteinander zu tun haben, rein zufällig vereinigt. Umgekehrt *zerfällt* eine gegebene Darstellung vom Grade $n$, wenn der $n$-dimensionale Darstellungsraum $\mathfrak{R}$ in zwei invariante lineare Teilräume $\mathfrak{R}'+\mathfrak{R}''$ zerlegt werden kann, deren keiner nur aus dem Vektor 0 besteht. Der Zerfall von $\mathfrak{R}$ in die beiden linearen Teilräume $\mathfrak{R}', \mathfrak{R}''$ bedeutet, dass jeder Vektor von $\mathfrak{R}$ sich auf eine und nur eine Weise als Summe eines in $\mathfrak{R}'$ und eines in $\mathfrak{R}''$ gelegenen Vektors gewinnen lässt. Die Forderung der Invarianz des Teilraumes $\mathfrak{R}'$ meint, dass kein Vektor von $\mathfrak{R}'$ durch die Abbildungen $U(s)$ der gegebenen Darstellung aus $\mathfrak{R}'$ herausgeworfen wird. Unzerfällbare Darstellungen mögen auch primitiv heissen; die kovariante Grössenart, welche durch eine primitive Darstellung definiert wird, nennen wir *einfach*. Es bestätigt sich durchweg, dass die physikalischen Grössen einfach sind. So ist der

Spielraum, innerhalb dessen die *elektromagnetische Feldstärke* in der vierdimensionalen Welt variieren kann, nicht durch den Begriff « Tensor 2. Stufe », sondern durch den Begriff « schiefsymmetrischer Tensor 2. Stufe » umschrieben; und er bezeichnet, wie man beweisen kann, eine *einfache* Grössenart. Die oben ausgesprochene Vermutung, dass die einzigen zur unimodularen affinen Gruppe $\mathfrak{C}$ gehörigen kovarianten Grossen Tensoren von bestimmter Symmetrie sind, trifft nur zu für die einfachen Grössen. Denn natürlich kann ich einen willkürlichen symmetrischen Tensor zweiter Stufe zusammen mit einem unabhängig davon variierenden willkürlichen schiefsymmetrischen Tensor 3. Stufe als eine einzige Grösse betrachten, welche in die beiden angegebenen einfachen Grössen zerfällt.

2. *Charakter.* Die Spur einer Matrix $U$, welche in einem bestimmten Koordinatensystem eine Abbildung des $n$-dimensionalen Vektorraumes auf sich repräsentiert, die Summe der Glieder in der Hauptdiagonale, ist unabhängig von der Wahl des Koordinatensystems allein durch die Abbildung determiniert. In einer $n$-dimensionalen Darstellung $s \to U(s)$ wird die Spur $\chi(s)$ von $U(s)$ in ihrer Abhängigkeit von dem Gruppenelement $s$ der *Charakter* oder die Charakteristik der Darstellung genannt. *Aequivalente Darstellungen haben den gleichen Charakter. Zerfällt eine Darstellung in mehrere andere, so ist ihr Charakter gleich der Summe der Charaktere der einzelnen Bestandteile.* Die grosse Bedeutung der Charaktere beruht vor allem darauf, dass von dem ersten Satz, wie wir bald sehen werden, in weitem Umfang die Umkehrung gilt. Primitiv heisst der Charakter einer primitiven Darstellung. *Charaktere sind Klassenfunktionen.* Zwei konjugierte Gruppenelemente $s$ und $r^{-1}sr$ rechnet man bekanntlich zur selben *Klasse*; eine Funktion des Gruppenelementes $s$ ist Klassenfunktion, wenn sie für alle Elemente derselben Klasse denselben Wert hat. Nun gilt für eine Darstellung

$$U(r^{-1}sr) = U^{-1}(r)\,U(s)\,U(r).$$

Die Matrix links ist also zu $U(s)$ äquivalent und hat folglich dieselbe Spur:

$$\chi(r^{-1}sr) = \chi(s).$$

3. *Unitär.* Sie wissen, wie der affine Raum zum metrisch-euklidischen spezialisiert wird vermöge einer positiv-definiten quadratischen Form, der metrischen Fundamentalform, die im Cartesischen oder normalen Koordinatensystem die Gestalt annimmt

(2) $$x^1_2 + x^2_2 + .... + x^2_n.$$

Rechnet man, wie wir hier vor allem um der Gültigkeit des Fundamentalsatzes der Algebra willen tun wollen, mit komplexen Koordinaten, so tritt anstelle von (2) im normalen Koordinatensystem die *Hermitesche* Einheitsform

$$x_1 x_1 + \bar{x}_2 x_2 + .... + x_n x_n.$$

Homogene lineare Transformationen, welche sie ungeändert lassen, heissen *unitär*. Wir sprechen von einer unitären Darstellung $\mathfrak{D}: s \rightarrow U(s)$ und bezeichnen den Darstellungsraum selbst als unitär, wenn alle $U(s)$ unitäre Transformationen sind. Das Ausgezeichnete dieses Falles tritt besonders in folgendem Satz hervor: *Lässt die unitäre Darstellung* $\mathfrak{D}$ *einen linearen Teilraum* $\mathfrak{R}'$ *des Darstellungsraumes* $\mathfrak{R}$ *invariant, so kann* $\mathfrak{R}$ *derart in* $\mathfrak{R}' + \mathfrak{R}''$ *zerlegt werden, dass auch* $\mathfrak{R}''$ *invariant ist*: die Darstellung $\mathfrak{D}$ zerfallt. Für $\mathfrak{R}''$ hat man den im Sinne unserer Metrik zu $\mathfrak{R}'$ senkrechten Teilraum zu nehmen, zu welchem ein Vektor dann und nur dann gehört, wenn er zu allen Vektoren von $\mathfrak{R}'$ senkrecht ist.

Die bisherigen Begriffe sind an keine besondere Voraussetzung über die Natur der Gruppe gebunden. Ich fasse jetzt für die *endlichen Gruppen* den Hauptinhalt der Darstellungstheorie, wie sie vor allem von G. FROBENIUS entwickelt wurde, in zwei Theoreme zusammen, den Orthogonalitätssatz und den Vollständigkeitssatz. Jede Darstellung der endlichen Gruppe $\mathfrak{g}$ ist einer unitären äquivalent, sodass wir uns ganz auf die unitären Darstellungen beschränken können und wollen.

I. **Orthogonalitätssatz.** *Die Komponenten einer oder mehrerer inäquivalenter unzerfällbarer unitärer Darstellungen bilden auf der Gruppenmannigfaltigkeit ein unitär-orthogonales Funktionensystem.* Genauer: Ist $U(s) = \| u_{ik}(s) \|$ eine unzerfällbare Darstellung vom Grade $n$, so ist der Mittelwert

$$\mathfrak{M}\{ \bar{u}_{ik}(s)\, u_{pq}(s) \} = \begin{cases} 1/n & \text{für } i=p, k=q \\ 0 & \text{in allen andern Fällen.} \end{cases}$$

Sind $U(s) = \| u_{ik}(s) \|$, $U'(s) = \| u'_{pq}(s) \|$ zwei inäquivalente unzerfällbare Darstellungen, so ist

$$\mathfrak{M}\{ \bar{u}_{ik}(s)\, u'_{pq}(s) \} = 0.$$

[$\mathfrak{M}$ ist das Zeichen für Mittelwert].

Daraus folgt insbesondere, dass die Komponenten $u_{ik}(s)$, $u'_{pq}(s)$,.... alle untereinander linear unabhängig sind. Ist $N$ die Ordnung der Gruppe, so durchläuft das Argument $s$ im ganzen $N$ Werte; in einem solchen Variabilitätsgebiet existieren höchstens $N$ voneinander linear unabhängige Funktionen. Infolgedessen ist notwendig

(3) $$n^2 + n'^2 + \dots \leq N.$$

Auf der linken Seite stehen die Quadrate der Grade irgendwelcher inäquivalenter unzerfällbarer Darstellungen.

II. **Vollständigkeitssatz.** *Die Komponenten sämtlicher inäquivalenter unzerfällbarer Darstellungen bilden ein* vollständiges *Orthogonalsystem.* Genauer: Führt man zur unzerfällbaren Darstellung $U(s) = \| u_{ik}(s) \|$ den Fourier-Koeffizienten einer willkürlichen Funktion $x(s)$ ein:

$$\mathfrak{M}\{ x(s)\, \bar{U}(s) \} = X$$

mit den Komponenten

$$x_{ik} = \mathfrak{M}\left\{ x(s)\, \bar{u}_{ik}(s) \right\},$$

so gilt auf Grund der Orthogonalitätsbeziehungen die Besselsche Ungleichung

$$(4) \qquad n \cdot \sum_{i,\,k=1}^{n} x_{ik}\, \bar{x}_{ik} + \ldots = n \cdot \operatorname{Spur}\,(X\bar{X}^*) + \ldots \leqq \mathfrak{M}\left\{ x(s)\, \bar{x}(s) \right\};$$

$X^*$ ist die transponierte Matrix zu $X$; die Summe links erstreckt sich über irgendwelche inäquivalente unzerfällbare Darstellungen. Es wird behauptet, dass hierin das Gleichheitszeichen gilt, wenn sie über ein *volles* System derartiger Darstellungen ausgedehnt wird. Für endliche Gruppen ist dies der Aussage äquivalent, dass bei entsprechender Summation in der Beziehung (3) das Gleichheitszeichen gilt.

Aus diesem allgemeinen Orthogonalitäts- und Vollständigkeitssatz erhält man den speziellen, welcher nicht auf die Darstellung und ihre Komponenten, sondern nur auf deren Spur, den Charakter, sich bezieht:

I. *Die Charaktere $\chi(s)$, $\chi'(s)$,.... inäquivalenter unzerfällbarer Darstellungen bilden ein unitärorthogonales Funktionensystem:*

$$\mathfrak{M}\left\{ \chi(s)\, \bar{\chi}(s) \right\} = 1, \qquad \mathfrak{M}\left\{ \bar{\chi}(s)\, \chi'(s) \right\} = 0.$$

Infolgedessen sind sie untereinander linear unabhängig.

II. *Die sämtlichen primitiven Charaktere bilden ein vollständiges Orthogonalsystem im Gebiet der Klassenfunktionen.* Zur willkürlichen Klassenfunktion $x(s)$ bilde man den Fourier-Koeffizienten

$$\mathfrak{M}\left\{ x(s)\, \bar{\chi}(s) \right\} = \xi.$$

In der Besselschen Ungleichung

$$\xi \bar{\xi} + \ldots \leqq \mathfrak{M}\left\{ x(s)\, \bar{x}(s) \right\}$$

gilt dann das Gleichheitszeichen, wenn sich die Summation links wiederum über ein *volles* System inäquivalenter unzerfällbarer Darstellungen erstreckt. Ist $k$ die Anzahl der Klassen, so kann es höchstens $k$ linear unabhängige Klassenfunktionen geben, und der spezielle Vollständigkeitssatz sagt aus, dass die Anzahl der verschiedenen primitiven Charaktere und damit die Anzahl der inäquivalenten unzerfällbaren Darstellungen diesen Maximalwert erreicht.

**Folgerungen**: 1) Bei der Zerlegung der Darstellung $\mathfrak{D}$ in ihre primitiven Bestandteile mögen die inäquivalenten Darstellungen $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{d}'$,..... je $g$, $g'$,..... mal auftreten:

$$\mathfrak{D} = g\mathfrak{d} + g'\mathfrak{d}' + \ldots$$

Für die zugehörigen Charaktere gilt dann in leicht verständlicher Bezeichnung

$$X(s) = g\chi(s) + g'\chi'(s) + \ldots$$

Da nach dem speziellen Orthogonalitätssatz die Charaktere $\chi(s)$, $\chi'(s)$,.... von einander linear unabhängig sind, sind die Vielfachheiten $g$, $g'$,.... in dieser Formel, also die primitiven Darstellungen, in welche $\mathfrak{D}$ zerlegt werden kann, im Sinne der Aequivalenz, einschliesslich der Vielfachheit ihres Vorkommens, eindeutig bestimmt. Die Zerlegung von $\mathfrak{D}$ kann abgelesen werden aus der « Fourier-Entwicklung » des Charakters $X(s)$ im Orthogonalsystem der primitiven Charaktere. Die Vielfachheit $g$ berechnet sich aus der Formel

$$g = \mathfrak{M}\left\{X(s)\,\bar{\chi}(s)\right\}. \tag{5}$$

2) Auf Grund derselben Formel und desselben Satzes besitzen zwei Darstellungen nur dann denselben Charakter $X(s)$, wenn sie im Sinne der Aequivalenz in dieselben primitiven Bestandteile zerfallen. Dies bedeutet aber, dass zwei Darstellungen nur dann denselben Charakter haben, wenn sie äquivalent sind. *An dem Charakter kann man eine Darstellung unzweideutig erkennen.*

3) Die Frage nach der Anzahl der Invarianten im Darstellungsraum $\mathfrak{D}$ ist keine andere als die, wie oft in der Darstellung $\mathfrak{D}$ vom Charakter $\chi$ die identische enthalten ist; die identische Darstellung ist die eindimensionale, welche jedem Gruppenelement die Abbildung $x' = x$ zuordnet, ihr Charakter ist gleich 1. Darum ist die gesuchte Zahl der linear unabhängigen Invarianten nach (5) gleich $\mathfrak{M}\left\{\chi(s)\right\}$.

In welchem Umfange lassen sich die beiden Hauptsätze (mit ihren Folgerungen) auf *unendliche Gruppen* übertragen? Offenbar wird dazu erfordert, dass auf der Gruppenmannigfaltigkeit Mittelwertbildung möglich ist. Im Gebiete der kontinuierlichen Gruppen wird sie nicht durch Summation, sondern durch Integration zu geschehen haben. Man muss die *natürliche Volummessung* auf der kontinuierlichen Gruppenmannigfaltigkeit ausfindig machen, welche unserer Mittelwertbildung bei endlichen Gruppen entspricht, die jedes Element $s$ mit dem gleichen Gewicht zählt. Dies gelingt. Die Integrale existieren dann sicher, wenn die Gruppenmannigfaltigkeit ein *geschlossenes* Gebilde ist; im andern Fall entstünden Konvergenzschwierigkeiten. Darum ist zu erwarten, dass die beiden Fundamentalsätze für geschlossene kontinuierliche Gruppen gelten. Der Beweis der Orthogonalitätsrelationen lässt sich in der Tat ohne weiteres von den endlichen Gruppen her übertragen. Nicht ganz so einfach liegen die Dinge beim Vollständigkeitstheorem, weil dieses im kontinuierlichen Gebiet nur als die Gleichung (4) sich aussprechen lässt, in welche eine willkürliche Ortsfunktion $x(s)$ auf der Gruppe eingeht, während die Beweise für endliche Gruppen direkt auf die Anzahlrelation (3) losgehen. Man kommt aber zum Ziel durch Betrachtung der Integralgleichung mit dem Kern $x(st^{-1})$. Ich erblicke darin eine der schönsten und überraschendsten Anwendungen der Theorie der Integralgleichungen. Es gibt keine Vollständigkeitsbeweise für Orthogonalsysteme, welche mit diesem gruppentheoretischen an Durchsichtigkeit wetteifern können.

Ich möchte weiter an den einfachsten Beispielen schildern, wie die Orthogonalitäts- und Vollständigkeitsrelationen dazu benutzt werden können, die primitiven Charaktere einer geschlossenen kontinuierlichen Gruppe zu bestimmen. Für die Gruppe $\mathfrak{d}_2$ der Drehungen eines Kreises in sich stellten wir die unendlichvielen primitiven eindimensionalen Darstellungen $\mathfrak{D}^{(m)}$ auf:

$$x' = e^{im\varphi}\, x \qquad [m=0,\ \pm 1, \ldots].$$

Der Charakter von $\mathfrak{D}^{(m)}$ ist $e^{im\varphi}$. Dass diese primitiven Charaktere ein Orthogonalsystem bilden, ist die Grundtatsache, von welcher die Theorie der Fourierschen Reihen ausgeht. Gäbe es eine weitere, zu keinem $\mathfrak{D}^{(m)}$ äquivalente unzerfällbare Darstellung, so müsste deren Charakter $\chi(\varphi)$ eine periodische Funktion von $\varphi$ mit der Periode $2\pi$ sein, welche zu allen $e^{im\varphi}$ orthogonal ist; aus der bekannten Vollständigkeit des Fourierschen Orthogonalsystemes, der Parsevalschen Gleichung folgt, dass es das nicht gibt. Bei diesem Gedankengang stützen wir uns 1) auf eine direkte explizite Konstruktion der primitiven Darstellungen und 2) auf die Parsevalsche Gleichung. Wir können ihn aber durch einen andern ersetzen, der beides nicht benutzt, sondern umgekehrt die Parsevalsche Gleichung aus dem allgemeinen gruppentheoretischen Vollständigkeitstheorem herleitet. *Alle unitären Matrizen eines kommutativen Systems können durch Einführung eines geeigneten normalen Koordinatensystems simultan in eindimensionale zerfällt werden.* Darum besitzt die kommutative geschlossene Gruppe $\mathfrak{d}_2$ nur eindimensionale unitäre primitive Darstellungen $x' = \chi(\varphi)\, x$. Aus der Darstellungsbedingung folgt, das $\chi(\varphi)$ eine periodische Funktion des Drehwinkels $\varphi$ vom absoluten Betrag 1 sein muss, welche der Funktionalgleichung

$$\chi(\varphi + \varphi') = \chi(\varphi) \cdot \chi(\varphi')$$

genügt. Daraus folgt leicht, Stetigkeit vorausgesetzt, dass $\chi(\varphi)$ die Gestalt hat: $e^{im\varphi}$, in der die Konstante $m$ eine ganze Zahl ist. Infolgedessen zeigt der allgemeine gruppentheoretische Vollständigkeitssatz zweierlei: 1. Die Funktionen $e^{im\varphi}$ $[m=0, \pm 1, \ldots]$ bilden ein vollständiges Orthogonalsystem; 2. Alle diese Funktionen müssen wirklich als primitive Charaktere auftreten; denn wenn auch nur eine von ihnen ausfiele, wäre die Vollständigkeit zerstört. (Beiläufig bemerkt: der Charakter einer imprimitiven Darstellung ist demnach eine endliche Fourierreihe mit ganzzahligen nicht-negativen Koeffizienten: $\sum\limits_m g_m\, e^{im\varphi}$).

Wie fruchtbar dieser gruppentheoretische Standpunkt gegenüber der Theorie der Fourierschen Reihen ist, hat sich darin gezeigt, dass unser Beweis ebenso für Bohrs *fastperiodische Funktionen* verfängt und weitaus am einfachsten zum Bohrschen Fundamentalsatz führt. Anstelle der geschlossenen Gruppe der Drehungen eines Kreises in sich tritt die offene der Schiebungen einer Geraden in sich.

Die Darstellungen $\mathfrak{D}_l$ der dreidimensionalen Drehungsgruppe $\mathfrak{d}_3$, welche durch die Kugelfunktionen geliefert werden, bilden ein volles System inäquivalenter primitiver Darstellungen. Die Drehungen in 2 Dimensionen sind nichts anderes als die unitären Transformationen einer komplexen Variablen. Durch stereographische Projektion wird die dreidimensionale Drehungsgruppe $\mathfrak{d}_3$, wie man weiss, in die Gruppe der zweidimensionalen unimodularen unitären Transformationen verwandelt. Ich bespreche darum als ein etwas allgemeineres Beispiel die unitäre Gruppe in $\nu$ Dimensionen. Jede der zu ihr gehörigen Transformationen $s$ ist innerhalb dieser Gruppe konjugiert zu einer « Haupttransformation » mit der Diagonalmatrix

$$\left\| \begin{matrix} \varepsilon_1 & & & \\ & \varepsilon_2 & & \\ & & \cdots & \\ & & & \varepsilon_\nu \end{matrix} \right\| ; \qquad \left( \begin{matrix} |\varepsilon_\lambda| = 1, \\ \varepsilon_\lambda = e^{i\varphi_\lambda} \end{matrix} \right)$$

denn diese Gestalt nimmt eine beliebig vorgegebene unitäre Transformation in einem geeigneten ihr angepassten normalen Koordinatensystem an. Die nur bis auf die Reihenfolge und mod. $2\pi$ bestimmten Grössen $\varphi_\lambda$ heissen die Drehwinkel von $s$. Der Charakter irgend einer Darstellung ist eine periodische symmetrische Funktion der $\varphi_\lambda$. In einem festgewählten Koordinatensystem bilden die Haupttransformationen eine *abelsche Untergruppe*. Auf ähnliche Weise wie oben folgt aus der Betrachtung dieser Untergruppe, dass der Charakter eine endliche Fourier-Reihe der Drehwinkel $\varphi_1, \ldots, \varphi_\nu$ sein muss mit ganzzahligen nicht-negativen Koeffizienten. Um aus ihnen die primitiven Charaktere auszusondern, muss man jetzt, anders als im abelschen Fall, die Orthogonalitätsrelationen heranziehen und zu diesem Zweck die *Klassendichtigkeit* $\Delta$ berechnen, d. h. das Volumen $\Delta\, d\varphi_1\, d\varphi_2 \ldots d\varphi_\nu$ desjenigen Stückes der Gruppenmannigfaltigkeit, für dessen Elemente allgemein der $\lambda^{\text{te}}$ Drehwinkel einen Wert zwischen $\varphi_\lambda$ und $\varphi_\lambda + d\varphi_\lambda$ besitzt. $\Delta$ ist $= D \cdot \bar{D}$, wo $D$ das Differenzenprodukt der $\varepsilon_\lambda$ ist. Es zeigt sich, dass die Orthogonalitäts- zusammen mit der Vollständigkeitsbeziehung auf Grund der bekannten arithmetischen und Symmetrieeigenschaften der primitiven Charaktere gerade zu einer expliziten Bestimmung ausreicht; das Resultat ist die Formel

$$\chi = \frac{|\varepsilon^{h_1}, \varepsilon^{h_2}, \ldots, \varepsilon^{h_\nu}|}{|\varepsilon^{\nu-1}, \ldots, \varepsilon, 1|},$$

in der $h_1 > h_2 > \ldots > h_\nu$ beliebige in der hingeschriebenen Reihenfolge geordnete ganze Zahlen sind. Unsere allgemeinen Sätze sind also wirklich etwas wert; sie sind so eindringend, dass sie in den wichtigsten Fällen diejenigen Grössen vollständig determinieren, von denen sie handeln. Wenn es erstaunlich sein mag, dass wir so sozusagen « durch die Luft » die primitiven Charaktere finden, ohne die zugehörigen Darstellungen zu kennen, so ist zu bedenken, dass der Beweis des allgemeinen Vollständigkeitssatzes natürlich eine Methode zur Konstruktion aller primitiven Darstellungen angibt. Immerhin ist im Felde der end-

lichen Gruppen eine explizite Berechnung der Charaktere in so weitem Umfange wie bei den kontinuierlichen Gruppen nicht gelungen (1).

Die Integrationsmethode steht in deutlichem Gegensatz zu der von S. Lie begründeten *Differentialmethode*, welche eine kontinuierliche Transformationsgruppe erzeugt aus ihren infinitesimalen, unendlichwenig von der Identität abweichenden Elementen. Die Lie'sche Theorie gehört mit in jenen grossen Gedankenzug, der die Welt aus ihrem Verhalten im Unendlichkleinen verstehen will, und der sich als so fruchtbar erwies, weil nur der Rückgang aufs Unendlichkleine zu den einfachen Elementargesetzen führt. Sein Standpunkt ist anschaulich durchaus natürlich; denn statt z. B. die Beweglichkeit eines im euklidischen Raum um einen festen Punkt drehbaren starren Körper durch die Forderung zu beschreiben, dass die Lage der Stellen des Körpers in jedem Moment aus ihrer Anfangslage durch eine Operation der euklidischen Drehunsgruppe hervorgeht, ist es natürlich, die kontinuierliche Drehung des Körpers als eine integrale Aneinanderreihung infinitesimaler Operationen dieser Gruppe aufzufassen, die in den einzelnen Zeitelementen aufeinander folgen. Auch in der abstrakten Gruppentheorie lässt sich die Lie'sche Idee durchführen, obwohl Lie selber, soviel ich weiss, ausschliesslich an Transformationsgruppen denkt. Ein besonderer Erfolg des Lie'schen Ansatzes liegt darin, dass er sowohl das Problem der möglichen Strukturen von Gruppen als auch das Problem ihrer Darstellung in ein *rein algebraisches* verwandelt. In dieser Richtung bewegen sich die tiefsinnigen Arbeiten von CARTAN (2).

Gemäss der Erzeugung einer Gruppe $\mathfrak{g}$ aus ihrer infinitesimalen $\gamma$ führt jede Darstellung von $\gamma$ zu einer Darstellung von $\mathfrak{g}$; die letzere braucht aber auf $\mathfrak{g}$ nur im Kleinen eindeutig zu sein. Und auf diesem Wege erhält man

---

(1) *Literatur.* Unsere Methode der Integration über die Gruppenmannigfaltigkeit, durch den Wortlaut der beiden Hauptsätze selber gefordert, wurde zuerst von A. HURWITZ, Gött. Nachrichten 1897, für invariantentheoretische Zwecke ausgebildet. Mit ihrer Hilfe lässt sich auf Grund des allgemeinen Hilbertschen Satzes von der endlichen Idealbasis zeigen, dass der sog. erste Fundamentalsatz der Invariantentheorie für jede geschlossene kontinuierliche Gruppe nicht minder wie für jede endliche Gruppe gilt. I. SCHUR leitete durch diese Methode zuerst die Orthogonalitätsbeziehungen für die Darstellungen der Drehungsgruppe ab. Seine Arbeiten in den Berliner Sitzungsberichten 1924, welche neben den gruppen- auch invariantentheoretische Ziele verfolgen, sind der Ausgangspunkt der neuen Entwicklung. In einigen Abhandlungen in der Math. Zeitschrift 23, 24, (1925-26) gelang es mir, durch Vereinfachung und Weiterbildung der Methode die primitiven Charaktere für alle halb-einfachen Gruppen zu berechnen. Der allgemeine Beweis des Vollständigkeitssatzes ist 1927 von einem meiner Schüler, Herrn F. PETER, und mir in den Math. Ann. 97 durchgeführt worden. Im gleichen Band habe ich meinen gruppentheoretischen Beweis für den Bohrschen Fundamentalsatz über die fastperiodischen Funktionen publiziert. Eine Arbeit in den Acta Mathematica 48 enthält Folgerungen betreffs der Abzählung von Invarianten.

(2) Die für uns wichtigsten sind seine Thèse aus dem Jahre 1894 und eine Arbeit im Bulletin Soc. Math. de France 41 (1913).

jede (gewissen Differenzierbarkeitsforderungen genügende) im Kleinen eindeutige Darstellung von $\mathfrak{g}$. Umgekehrt kann man aus der Kenntnis der primitiven im Grossen eindeutigen Darstellungen von $\mathfrak{g}$ nur dann auf die sämtlichen Darstellungen von $\gamma$ schliessen, wenn $\mathfrak{g}$ *einfach zusammenhängend* ist; denn unter dieser Voraussetzung hat die Eindeutigkeit im Kleinen die Eindeutigkeit im Grossen zur Folge. Sei $\mathfrak{c}$ z. B. die Gruppe aller unimodularen linearen Transformationen in $\nu$ Variablen, $\mathfrak{c}_u$ und $\mathfrak{c}_r$ die Untergruppen, welche durch den Zusatz « unitär » bezw. « reell » aus ihr ausgeschieden werden; $\gamma$, $\gamma_u$, $\gamma_r$ die zugehörigen infinitesimalen Gruppen. Da im algebraischen Gebiet, zumal im Gebiete der linearen Algebra, den Parametern auferlegte Reellitätsbedingungen, wie sie $\gamma$ zu $\gamma_u$ und $\gamma_r$ einschränken, nicht fühlbar werden, liefern die Darstellungen von $\gamma_u$ ohne weiteres diejenigen von $\gamma$ und $\gamma_r$.

Die Charaktere von $\mathfrak{c}_u$ aber beherrschen wir, weil $\mathfrak{c}_u$ geschlossen ist, durch die Integrationsmethode. Auf dem Wege

$$\mathfrak{c}_u \rightarrow \gamma_u \rightarrow \gamma_r \rightarrow \mathfrak{c}_r$$

kommen wir so zu einer Theorie der Darstellungen von $\mathfrak{c}_r$. Der erste Schritt $\mathfrak{c}_u \rightarrow \gamma_u$ verlangt nach dem Gesagten noch den topologischen Nachweis, dass $\mathfrak{c}_u$ einfach zusammenhängend ist. Diese Kombination von Integral- und Differentialmethode mit topologischem Einschlag bahnte mir den Weg von den geschlossenen zu den sämtlichen halb-einfachen Gruppen.

Für die Gewinnung der allgemeinen Sätze ist die transzendente Integrationsmethode überlegen. Der Vorteil der infinitesimalen ist die durch sie herbeigeführte Algebraisierung. Die geschilderte Kombination vereinigt beides, kann aber dadurch dem Nachteil des Lie'schen Ansatzes nicht entgehen, gewisse nicht im Wesen der Sache begründete Differenzierbarkeitsannahmen einführen zu müssen. Für das eben erwähnte Beispiel der Gruppe $\mathfrak{c}_r$ haben sich neuerdings J. v. NEUMANN und I. SCHUR von diesen Einschränkungen zu befreien gewusst. Die Arbeiten sind in den Berl. Sitzungsber. 1927-28 erschienen. SCHUR verfährt so, dass er die in der vollen Gruppe enthaltenen einparametrigen Gruppen und ihre Darstellungen direkt studiert, ohne für sie auf die infinitesimalen Erzeugenden zurückzugreifen.

Neben die oben erwähnte additive tritt die *multiplikative Komposition von Darstellungen*. Unterwirft man $m$ Variable $x_i$ einer linearen Transformation $A$, $n$ Variable $y_k$ einer Transformation $B$, so erfahren die $m \cdot n$ linear unabhängigen Grössen $x_i y_k$ eine gewisse lineare Transformation, welche nach Hurwitz mit $A \times B$ bezeichnet wird. Aus einer $m$-dimensionalen Darstellung $\mathfrak{G} : s \rightarrow U(s)$ und einer $n$-dimensionalen $\mathfrak{H} : s \rightarrow V(s)$ entsteht die Darstellung

$$\mathfrak{G} \times \mathfrak{H} : s \rightarrow U(s) \times V(s).$$

Sind $\chi(s)$, $\xi(s)$ die Charaktere von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$, so ist der Charakter von $\mathfrak{G} \times \mathfrak{H}$ das Produkt $\chi(s) \cdot \xi(s)$.

Hauptfragen der Theorie, welche allein auf Grund der Charaktere gelöst werden können, sind die folgenden:

1) Wenn $\mathfrak{H}$ eine primitive Darstellung von $\mathfrak{g}$ ist und $\mathfrak{g}'$ eine Untergruppe von $\mathfrak{g}$, so wird $\mathfrak{H}$ als Darstellung von $\mathfrak{g}'$ im allgemeinen nicht mehr primitiv sein; in welche primitiven Bestandteile zerfällt es?

2) Wenn $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$ zwei primitive Darstellungen von $\mathfrak{g}$ sind, in welche primitiven Darstellungen zerfällt das Produkt $\mathfrak{G} \times \mathfrak{H}$?

Als Beispiel zu 1) wurde schon früher erwähnt: die $(2l+1)$-dimensionale Darstellung $\mathfrak{D}_l$ der Drehungsgruppe $\mathfrak{d}_3$ zerfällt, wenn man $\mathfrak{d}_3$ zur Gruppe $\mathfrak{d}_2$ der Drehungen um die $z$-Achse einschränkt, in die $2l+1$ eindimensionalen Darstellungen $\mathfrak{D}^{(m)}$ von $\mathfrak{d}_2$ mit den Werten $m=l$, $l-1, \ldots -l$. Als Beispiel zu 2) führe ich die für dieselbe Gruppe $\mathfrak{d}_3$ gültige Formel an:

$$\mathfrak{D}_l \times \mathfrak{D}_{l'} = \sum \mathfrak{D}_\lambda \quad [\lambda = l+l', l+l'-1, \ldots, |l-l'|]. \tag{6}$$

Ueber die *Anwendung der Gruppentheorie auf die Quantenmechanik* muss ich mich sehr kurz fassen. Zwei Gruppen sind es vor allem, welche die Hauptrolle spielen, die *Gruppe der Drehungen im dreidimensionalen Raum* und die *symmetrische Permutationsgruppe*. Denn das um den ruhenden Kern sich bewegende Elektronengebäude eines Atoms oder Ions besitzt seiner Konstitution nach Kugelsymmetrie um den Kern $O$; und da die Elektronen lauter gleichartige Wesen sind, besteht im gleichen Sinne Invarianz gegenüber den Permutationen der Elektronen. Die Zustände eines physikalischen Gebildes werden in der Quantenphysik repräsentiert durch Vektoren $\mathfrak{x}$ in einem unendlichdimensionalen unitären Systemraum. Betrachten wir das Atom in zwei Lagen, welche durch die Drehung $s$ um $O$ auseinander hervorgehen, so entspricht jedem Zustand $\mathfrak{x}$ des Atoms in der einen ein Zustand $\mathfrak{x}'$ in der andern Lage; der Uebergang $\mathfrak{x} \rightarrow \mathfrak{x}'$ ist eine mit der Drehung $s$ nach dem Darstellungsgesetz verbundene unitäre Abbildung des Systemraums auf sich selbst. Diese unendlichdimensionale Darstellung von $\mathfrak{d}_3$ kann zerlegt werden in ihre endlichdimensionalen primitiven Bestandteile $\mathfrak{D}_l$; der unendlichdimensionale Systemraum zerfällt entsprechend in Teilräume $\mathfrak{R}_l$. $l$ heisst « azimutale Quantenzahl ». Befindet sich das Atom in einem Zustand, dessen repräsentierender Vektor in $\mathfrak{R}_l$ liegt, so besitzt das Impulsmoment einen wohlbestimmten Wert, für welchen die ältere Quantentheorie $\frac{h}{2\pi} \cdot l$, die neuere aber $\frac{h}{2\pi} \cdot \sqrt{l(l+1)}$ ergibt; $h$ ist das Plancksche Wirkungsquantum.

Dem Zusammentreten zweier Elektronen entspricht die multiplikative Komposition der Darstellungen. So bedeutet die Formel (6), dass beim Zusammentreten zweier Elektronen mit den azimutalen Quantenzahlen $l$ und $l'$ ein Gebilde entsteht, dessen azimutale Quantenzahl $\lambda$ der Werte $l+l'$, $l+l'-1, \ldots |l-l'|$ fähig ist; die ältere Quantentheorie beschreibt dieses Verhalten als Resultantenbildung mit Einquantelung. Die Ordnung der Linienspektren der Atome ist

durch und durch gruppentheoretischer Natur. Alle Quantenzahlen, die dabei auftreten, mit Ausnahme der die verschiedenen Terme derselben Serie voneinander unterscheidenden « Hauptquantenzahl », sind Kennzeichen von Gruppendarstellungen. Mehrere Elektronen können zu einem Atom oder Molekül von verschiedenem Symmetriecharakter zusammentreten. Diese Unterschiede der Symmetrie lassen sich durch raumzeitliche Bilder nicht adäquat wiedergeben, sie entsprechen aber genau den verschiedenen möglichen unzerfällbaren Darstellungen der Gruppe aller Permutationen unter den Elektronen. Die Energie ihrer gegenseitigen Bindung berechnet sich in einfacher Weise mit Hilfe des Charakters der Darstellung. Infolgedessen können auch zwei Atome von gegebenem Symmetriezustand noch in verschiedener, durch Symmetriecharaktere zu unterscheidender Weise zu einem Molekül zusammentreten. Die neue Quantenmechanik unterbaut und begründet die aus der chemischen Erfahrung abstrahierte Kombinatorik der Valenzstriche durch die Darstellungen der Permutationsgruppe.

LEONIDA TONELLI

# IL CONTRIBUTO ITALIANO ALLA TEORIA DELLE FUNZIONI DI VARIABILI REALI

Nel decennio fra il 1870 ed il 1880, mentre in Germania la critica penetrante di DEDEKIND, CANTOR, DU BOIS-REYMOND, HEINE, SCHWARZ, WEIERSTRASS, ed altri, metteva in discussione i fondamenti dell'Analisi Matematica, sollevando contro di essi dubbi ed obbiezioni, e cercando di porli in forma logicamente inattaccabile, e mentre, in Francia, DARBOUX, con la sua celebre memoria sulle funzioni discontinue, mostrava la necessità del moderno rigore matematico, in Italia, ULISSE DINI, allora giovanissimo professore dell'Università di Pisa, procedeva, nelle sue lezioni universitarie, ad una sistematica revisione di tutti i principi dell'Analisi Infinitesimale, e raccoglieva i risultati dei suoi studi in un volume, pubblicato, nel 1878, col titolo *Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali.* La cosidetta « teoria delle funzioni di variabili reali » ebbe precisamente origine da questo libro del DINI; e, dal 1880 ad oggi, conseguì un ampio svolgimento, per opera di Analisti di varie nazioni.

In questa Conferenza, mi propongo di esporre rapidamente i contributi più essenziali portati a tale teoria dagli studiosi italiani.

* * *

La derivabilità delle funzioni continue, di una variabile reale, fu, un tempo, generalmente ammessa, con la sola eccezione di alcuni punti singolari; ma un esempio, dato da WEIERSTRASS nel 1861, e divenuto poi classico, mostrò la possibilità di eccezioni ben più larghe, e, precisamente, mostrò l'esistenza di funzioni continue prive ovunque di derivata. L'esempio di WEIERSTRASS venne generalizzato da P. DU BOIS-REYMOND, ed il DINI indicò, successivamente, tutta una vasta classe di funzioni continue completamente mancanti di derivata. Il fatto, messo così in luce, indusse il DINI a generalizzare il concetto di derivata; ed Egli giunse, in tal modo, a definire gli *estremi oscillatori del rapporto incrementale di una funzione continua di una variabile,* ora noti comunemente sotto il nome di *numeri derivati.* Di questi *numeri derivati* il DINI, nel suo libro già indicato, fece un ampio studio, determinando le loro prime fondamentali proprietà.

La considerazione dei numeri derivati di una funzione continua conduce subito ad un problema importante, quello di trovare le condizioni necessarie e sufficienti

sotto le quali la conoscenza di un numero derivato determina, a meno di una costante additiva, la funzione primitiva. Nel caso di un numero derivato limitato, questo problema fu completamente risoluto da V. VOLTERRA nel 1881, e cioè con tre anni di precedenza sulle ricerche di SCHEEFFER.

Un altro problema fondamentale, che sorge dalla considerazione della derivata o dei numeri derivati di una funzione continua, è quello della ricerca delle funzioni primitive. Simile problema, limitato alla considerazione della derivata, è precisamente quello, come è ben noto, da cui ebbe origine il Calcolo Integrale; ed il concetto di *integrale definito*, posto nella sua prima forma da CAUCHY, sul principio del secolo scorso, è andato assumendo, nel secolo presente, forme via via più generali, col LEBESGUE dapprima e col DENJOY ed altri poi, appunto per poter prestarsi sempre meglio alla ricerca delle funzioni primitive. Per una vastissima classe di derivate o di numeri derivati, la ricerca delle funzioni primitive può compiersi utilizzando la definizione di integrale definito dato da CAUCHY. La vera portata di tale definizione fu messa in luce da RIEMANN, con la condizione di integrabilità che da lui prende il nome, e che può assumere varie forme, come hanno mostrato il VOLTERRA, il DU BOIS-REYMOND, il LEBESGUE ed il VITALI. Ma il VOLTERRA mostrò per primo, e fin dal 1881, che esistono delle derivate, limitate in tutto l'intervallo in cui si considerano, e non soddisfacenti alla condizione di integrabilità di RIEMANN, per le quali, dunque, la definizione di integrale di CAUCHY non può servire a risolvere il problema delle funzioni primitive. Di qui la necessità di una definizione di integrale più generale di quella di CAUCHY; e così si giunse all'integrale del LEBESGUE e poi a quello del DENJOY. Il DENJOY mostrò che, col sussidio del suo integrale, può ottenersi la funzione primitiva tutte le volte che la derivata, o, più generalmente, il numero derivato conosciuto, è ovunque finito; e successivamente, nel 1920, io provai che con lo stesso integrale, il problema della ricerca delle funzioni primitive può risolversi in tutti i casi in cui risulta determinato e quindi non appena la conoscenza della derivata o del numero derivato determini, a meno di una costante additiva, la funzione primitiva.

La teoria dell'integrale di LEBESGUE è fondata su quella della misura dei gruppi di punti e delle funzioni *misurabili*; e questa seconda teoria, nella forma generale datale dal LEBESGUE, richiede per il suo svolgimento, l'uso del cosidetto postulato *delle scelte arbitrarie* o postulato di ZERMELO. Con l'ausilio di siffatto postulato, G. VITALI costruì, nel 1905, il primo esempio di insieme di punti non misurabile nel senso del LEBESGUE. Peraltro, molti analisti non ammettono il postulato di ZERMELO; ed anch'io ritengo insufficienti i ragionamenti che lo utilizzano. Per tale ragione, mi posi la questione di liberare la teoria della misura dei gruppi di punti e dell'integrazione dal postulato indicato; e, nei miei «Fondamenti di Calcolo delle Variazioni», riuscii completamente allo scopo, introducendo gli insiemi, da me chiamati *pseudointervalli*, e le funzioni *quasi-continue*. Gli

*pseudointervalli* e le funzioni *quasi-continue* costituiscono delle classi particolari degli insiemi misurabili e delle funzioni misurabili del LEBESGUE; ma, sino ad ora, nessuno è riuscito a costruire effettivamente, e cioè senza far uso del postulato di ZERMELO, un insieme lineare di punti ed una funzione che non siano, rispettivamente, uno pseudointervallo ed una funzione quasi-continua.

Date poi le innegabili difficoltà che presenta lo studio della misura dei gruppi di punti, io, seguendo in ciò l'esempio di alcuni analisti di altre nazioni, cercai anche di rendere la teoria dell'integrazione indipendente da quella della misura degli insiemi di punti; e credo di essere riuscito, nel 1923, a dare in questo indirizzo, una teoria veramente elementare e completa dell'integrale del LEBESGUE.

L'analisi delle proprietà caratteristiche delle funzioni integrali, quando l'integrale sia inteso nel senso del LEBESGUE, condusse G. VITALI a definire, nel 1905, una classe importantissima di funzioni di una variabile da lui chiamate *funzioni assolutamente continue*. Esse risultano funzioni continue ed a variazione limitata; ammettono quasi dappertutto una derivata finita, la quale risulta integrabile nel senso del LEBESGUE, e riproduce, quando venga integrata, la sua funzione primitiva. Come già aveva indicato il LEBESGUE, e come ritrovò lo stesso VITALI, che ne pubblicò per primo la dimostrazione, l'assoluta continuità caratterizza completamente le funzioni integrali del LEBESGUE.

La teoria dell'integrazione, secondo il LEBESGUE, fu, da questo stesso autore, estesa alle funzioni di più variabili; e in tale estensione, si presentò il problema di ridurre un integrale multiplo a più integrali semplici, cioè relativi a funzioni di una sola variabile. Il caso delle funzioni limitate fu trattato dal LEBESGUE; ma spetta a G. FUBINI il merito di aver risoluto, nel 1907, nella sua forma più generale, simile problema. Il teorema dimostrato, a questo proposito, dal FUBINI, ammette una proposizione reciproca, che io indicai nel 1909 e che fu poi ritrovata dallo stesso FUBINI. E sempre nel 1909, io diedi, per gli integrali multipli, anche una formula d'integrazione per parti.

Agli integrali delle funzioni di più variabili fu esteso dal LEBESGUE, nel 1910, ed in forma singolarmente generale, il così detto *secondo teorema della media*; ma è doveroso rammentare che la prima estensione di tale teorema fu ottenuta, nel 1892 e nel 1902, in una forma più particolare di quella datale poi dal LEBESGUE, ma di certo anch'essa importante, da C. ARZELÀ, che in questa Università fu maestro illustre ed amato.

Nel 1908, G. VITALI studiò la derivazione degli integrali multipli, giungendo a risultati notevoli; e la teoria del VITALI venne poi ripresa, e più ampiamente sviluppata, da LEBESGUE, DE LA VALLÉE POUSSIN ed altri, utilizzando tutti un'idea fondamentale del VOLTERRA sulla derivazione, ed una proposizione geometrica del VITALI, che i tedeschi chiamano la *Überdeckungssatz von Vitali*. Seguendo un'altra direzione, nel 1915, FUBINI ed io stabilimmo la doppia deri-

vazione mista, in quasi tutto il campo della loro esistenza, degli integrali indefiniti delle funzioni di due variabili.

* * *

Un altro capitolo molto interessante, della teoria delle funzioni di variabili reali, è quello delle serie di funzioni. È ben conosciuta la chiarificazione portata, nello studio di tali serie dal concetto di *convergenza uniforme*, introdotto, intorno alla metà del secolo scorso, da L. Seidel e G. Stokes. La convergenza uniforme permette di trasportare alla somma della serie alcune delle proprietà più comuni ammesse dai singoli termini della serie, quali, ad esempio, la continuità e l'integrabilità, il che, invece, non è sempre lecito, contrariamente a quanto credevasi prima di Seidel e Stokes, se la convergenza uniforme non ha luogo. Per quanto riguarda la continuità, il Dini, nel suo libro citato, mostrò che la convergenza uniforme è condizione, non soltanto sufficiente, ma anche necessaria affinchè una serie di funzioni continue e *positive* abbia una somma continua. Se i termini della serie sono funzioni continue, ma *non tutte positive*, la convergenza uniforme non è più necessaria per la continuità della somma; ed il Dini considerò perciò una convergenza più generale della uniforme, che chiamò *uniforme semplice*, e che assicura anch'essa la continuità desiderata. Presentavasi a questo punto assai seducente la ricerca della condizione necessaria e sufficiente affinchè una serie di funzioni continue abbia una somma continua. Siffatta ricerca, irta di molteplici difficoltà, fu condotta brillantemente a termine da C. Arzelà, il quale, nel 1883, definì una nuova specie di convergenza, la *convergenza uniforme a tratti*, come Egli la chiamò, e che, seguendo il Borel, viene ora detta *convergenza quasi-uniforme*. Questa particolare convergenza dà, come fu dimostrato dall'Arzelà, la condizione cercata.

Poco più tardi, nel 1885, l'Arzelà determinò pure la condizione necessaria e sufficiente affinchè la somma, supposta limitata, di una serie di funzioni integrabili secondo la definizione di Cauchy (o, come dicesi comunemente, secondo Riemann) sia anch'essa integrabile; tale condizione viene espressa dalla *convergenza uniforme a tratti, in generale*, come la chiamò l'Arzelà, e che, col Borel, vien detta *convergenza quasi-uniforme in generale*. Aggiungendo, a tale nuova specie di convergenza, la condizione che le somme parziali della serie siano tutte ugualmente limitate, dall'Arzelà fu mostrato che vale anche l'integrabilità termine a termine della serie.

Il teorema così stabilito, che fu poi esteso dal Lebesgue alle funzioni integrabili nel suo senso, e che viene chiamato perciò teorema di Arzelà-Lebesgue, fornisce la condizione di integrabilità per serie più utile e più usata.

Un altro teorema importante di integrazione per serie fu dato, nel 1906, da B. Levi, e si applica alle serie di funzioni positive, integrabili secondo il Lebesgue.

Infine, in questo ordine di idee, dobbiamo menzionare le penetranti ricerche di G. VITALI sull'*integrabilità completa per serie.* Egli, movendo dal concetto di *funzioni assolutamente continue,* di cui abbiamo già parlato, definì *l'equi-assoluta continuità* di un insieme di funzioni, e per mezzo di essa determinò, nel 1907, la condizione necessaria e sufficiente affinchè una serie convergente di funzioni integrabili secondo LEBESGUE, su un dato intervallo, sia integrabile termine a termine su ogni gruppo misurabile di punti di tale intervallo.

Insieme con l'integrabilità, va considerata la derivabilità per serie, e su tale argomento G. FUBINI mostrò, nel 1915, la derivabilità termine a termine, quasi dappertutto, delle serie convergenti di funzioni monotone, risultato che fu poi da me notevolmente generalizzato nel 1916.

Per le serie di funzioni misurabili, e quindi anche per le serie di funzioni quasi-continue, è fondamentale un teorema il quale prova che la convergenza semplice in tutto un intervallo, porta necessariamente la convergenza uniforme in un insieme di punti di misura vicina quanto si vuole a quella dell'intero intervallo. Questa proposizione porta il nome del matematico russo TH. EGOROFF, che la dimostrò nel 1911; essa però fu stabilita, alcuni mesi prima, da C. SEVERINI.

* * *

Lo studio delle serie di funzioni conduce naturalmente al problema della rappresentazione delle funzioni in serie di polinomi, in serie trigonometriche, e in generale, in serie di funioni di un dato tipo. Per le funzioni continue, un teorema ormai classico, e che al suo apparire destò grande impressione, è quello dato da WEIERSTRASS nel 1885, col quale si afferma la possibilità dello sviluppo di una qualsiasi funzione continua in serie uniformemente convergente di polinomi. Simile sviluppo non è unico, e può ottenersi in molte forme diverse, fra le quali una delle più convenienti, sotto vari aspetti, è quella che deriva da un certo integrale di STIELTJES, che E. LANDAU e CH. J. DE LA VALLÉE POUSSIN ripresero, nel 1908, per ottenerne precisamente la rappresentazione approssimata di una funzione continua, ed anche discontinua, e quindi il desiderato sviluppo in serie. L'integrale di STIELTJES presenta il vantaggio di dare con tutta facilità i coefficienti del polinomio d'approssimazione; ed io, nel 1910 e nel 1916, misi in evidenza molte sue proprietà interessanti, facendone pure l'estensione al caso delle funzioni di più variabili, nel quale caso, come già aveva fatto F. RIESZ per le funzioni di una variabile sola, dimostrai anche che l'integrale di STIELTJES si presta mirabilmente alla rappresentazione approssimata di una qualsiasi funzione integrabile.

Fra i vari sviluppi di una funzione continua in serie di polinomi, può convenire, in certe questioni, di considerare quello che offre la più rapida convergenza. Siffatto sviluppo si ottiene col metodo d'approssimazione dovuto a TCHEBYCHEV, del quale metodo io feci un ampio studio, nel 1907, nella mia tesi di laurea,

trattando per primo il caso delle funzioni di due variabili e dimostrando che, a differenza di quanto avviene per le funzioni di una variabile sola, nel caso di due variabili il polinomio d'approssimazione di TCHEBYCHEV, di dato grado, non è più unico. I miei metodi furono poi utilizzati, per interessanti generalizzazioni, da F. SIBIRANI, nel 1909 e nel 1912.

Sia dal punto di vista della teoria pura, sia da quello delle applicazioni dell'Analisi, fra gli sviluppi in serie delle funzioni di variabili reali, il posto predominante spetta alle serie trigonometriche e, più particolarmente, alle serie di FOURIER. Su queste serie ho scritto un libro, di cui si sta ora ultimando la stampa; e di esse parlerò ampiamente altrove.

* * *

I metodi della teoria delle funzioni di variabili reali hanno portato un contributo di chiarificazione e di generalizzazione anche nel campo delle equazioni differenziali; e qui dobbiamo menzionare il teorema di esistenza dell'integrale di un'equazione differenziale ordinaria del primo ordine, o di un sistema di tali equazioni, tutte risolute rispetto alle derivate, dimostrato dal PEANO nel 1890 sotto la sola ipotesi della continuità dei secondi membri delle equazioni. E lo stesso PEANO fece anche vedere che, quando non intervengano ulteriori condizioni per l'unicità della soluzione, gli integrali uscenti da uno stesso punto sono infiniti e costituiscono un intero fascio. Altri importanti risultati sulle equazioni differenziali e precisamente sulla loro integrazione approssimata, furono ottenuti da C. SEVERINI.

* * *

Al campo delle funzioni di variabili reali appartengono anche gli studi sui fondamenti della teoria delle curve e delle superficie. È noto che JORDAN, nel suo classico « *Cours d'Analyse* », muovendo dalla rappresentazione analitica delle curve, diede una definizione generalissima di curva piana. Tale definizione, pur presentandosi molto comoda sotto vari punti di vista, non aderisce troppo fedelmente al nostro concetto intuitivo di curva, ed il PEANO, nel 1890, mise ciò brillantemente in evidenza costruendo una curva, nel senso di JORDAN, che riempie completamente un quadrato. Questa curva, che al suo apparire destò grande sorpresa, ora è conosciuta col nome di *curva di Peano*.

Alla definizione di JORDAN, avente carattere essenzialmente analitico, A. SCHOENFLIES ne contrappose un'altra di natura puramente geometrica. Il confronto fra queste due definizioni ha condotto PIA NALLI, nel 1911, ad esprimere in forma interessante la condizione necessaria e sufficiente affinchè una curva chiusa di SCHOENFLIES sia una curva di JORDAN.

La curva di PEANO, a cui abbiamo accennato più sopra, mostra che è possibile porre una corrispondenza, continua almeno in un senso, fra tutti i punti

di un segmento rettilineo e tutti quelli di un quadrato, cioè fra un dominio ad una dimensione ed un altro a due dimensioni. Il MILESI, nel 1892, provò che una siffatta corrispondenza non può mai essere continua in ambedue i sensi.

La condizione necessaria e sufficiente affinchè una curva di JORDAN risulti rettificabile, cioè abbia lunghezza finita, fu determinata dal JORDAN stesso mediante il suo concetto di funzione di una variabile a variazione limitata. Dopo di ciò, restava da risolvere l'importante questione di vedere in che relazione sta, nel caso generale, la lunghezza della curva con quell'integrale classico che, nei casi più semplici, i trattati mostrano dare il valore della detta lunghezza. Per risolvere completamente simile questione è necessario ricorrere all'integrale del LEBESGUE, e lo stesso LEBESGUE dimostrò, sotto condizioni molto più larghe delle usuali, che la lunghezza della curva è ancora data dall'integrale classico. Il caso generale fu da me studiato e risoluto nel 1908; ed io mostrai che, allorquando la curva è rettificabile, l'integrale classico, preso nel senso del LEBESGUE, esiste sempre finito e non supera mai il valore della lunghezza della curva; poi determinai la condizione necessaria e sufficiente affinchè tale lunghezza sia data esattamente dall'integrale classico.

Le questioni ora accennate per le curve si pongono naturalmente anche per le superficie; ma in questo nuovo campo esse presentano delle difficoltà di ordine assai più elevato. Nel 1926, mi occupai delle superficie date nella forma $z=f(x, y)$; e, muovendo dalla definizione di area di una superficie data dal LEBESGUE, che è la più generale e la più soddisfacente fra quelle conosciute, determinai, dapprima, la condizione necessaria e sufficiente affinchè la superficie considerata abbia area finita, dimostrai poi che il ben noto integrale classico, relativo all'area, non può mai superare il valore dell'area medesima, ed infine fissai la condizione necessaria e sufficiente affinchè l'integrale classico dia esattamente il valore dell'area. Per raggiungere il mio scopo, mi fu necessario di porre, in forma completamente diversa dall'usuale, i concetti di funzioni di due variabili a variazione limitata ed assolutamente continue.

Sull'area delle superficie e sulle funzioni di due variabili a variazione limitata, vanno citati anche alcuni studi recentissimi di P. NALLI e G. ANDREOLI, ai quali si deve pure una definizione di coppia di funzioni a variazione limitata, che potrà convenientemente utilizzarsi. Debbo anche aggiungere che i risultati della teoria delle funzioni di variabili reali mi hanno permesso, nel 1915, di dare la prima dimostrazione generale della classica proprietà di minimo dell'area della sfera.

* * *

Dirò, infine, brevemente, del contributo portato, dai cultori italiani della teoria delle funzioni di variabili reali, ai fondamenti del calcolo funzionale, nell'indirizzo concepito dal VOLTERRA.

Come alla base del Calcolo Infinitesimale sta lo studio degli insiemi di punti,

così alla base del Calcolo Funzionale sta quello degli insiemi di funzioni, di curve e di superficie. In questo studio è fondamentale il concetto di *uguale continuità* per un insieme di funzioni, posto da G. ASCOLI nel 1879; ed è altrettanto fondamentale un criterio, dato da C. ARZELÀ nel 1895, per riconoscere tale uguale continuità. L'esistenza di almeno una funzione di accumulazione o funzione limite, per un insieme di funzioni ugualmente continue ed ugualmente limitate, fu dimostrata dall'ASCOLI nel 1883, ed alcuni anni or sono io riuscii a liberarne la dimostrazione dal postulato di ZERMELO. L'ARZELÀ nel 1889 ed io nel 1913, demmo, poi, due teoremi diversi circa l'esistenza di una curva di accumulazione per un insieme di curve.

Dagli studi a cui ho ora accennato, muove l'indirizzo da me seguito nel Calcolo delle Variazioni; ma di ciò ho già parlato al Congresso di Toronto e qui non mi ripeterò.

* * *

In questa rapida esposizione, la tirannia del tempo mi ha obbligato a tacere di tanti risultati dei quali avrei pur voluto parlare; ed io confido che gli Autori, così sacrificati, non me ne serberanno rancore. Ma in ciò che ho detto vi è quanto basta perchè si possa giudicare se il contributo italiano alla teoria delle funzioni di variabili reali sia o no di fondamentale importanza.

LUIGI AMOROSO

# LE EQUAZIONI DIFFERENZIALI DELLA DINAMICA ECONOMICA

## SOMMARIO



## I.

1° - Alcuni anni fa la economia matematica sembrava giunta ad un punto morto. Dopo la sistemazione generale di Walras e di Pareto, che raccoglieva in un'unica sintesi, nella teoria dell'equilibrio, tutte le idee, che da circa mezzo secolo si erano successivamente presentate intorno alla rappresentazione matematica dei fenomeni economici, sembrava che l'ultima parola fosse detta, almeno *pro tempore*, e che il nuovo metodo avesse dato, per il momento, tutti i frutti di cui era capace. Non che nuovi problemi matematici non apparissero in vista: ma la loro soluzione sembrava sorpassare le forze dell'intelletto umano. Si pensava alla risoluzione numerica delle equazioni dell'equilibrio. Ma quale mente umana sarebbe stata capace di trattare algebricamente, fino alla soluzione, sistemi non lineari di migliaia di equazioni o di migliaia di incognite? Si pensava ad una trasformazione della teoria statica in una teoria dinamica, ma non si vedeva quale potesse essere la via per siffatta estensione. L'interferenza dei fenomeni strettamente economici con quelli politici e sociali sembrava, d'altra parte, nel campo dinamico, così stretta, che un'analisi strettamente economica appariva senza significato. La dinamica economica appariva perdersi nel mare più vasto della Sociologia e della Politica. Lo stesso Pareto sembrava affermasse questo punto di vista, non tanto in linea teorica, quanto in linea pratica, allorchè nell'ultimo periodo della sua vita, si dava tutto alla Sociologia, abbandonando

le indagini di Economia Pura, che pure avevano formato il successo della sua maturità scientifica.

Di fronte alle difficoltà dei problemi maggiori, che restavano ancora da risolvere, alla povertà concettuale dei risultati che pur apparivano nuovi, si aveva la sensazione, che chi volesse continuare a mietere nel vecchio campo, non potesse se non girare attorno alle posizioni già conquistate.

2° - Il periodo critico è oggi superato. Il fuoco covava sotto la cenere, e, tutto di un colpo, le fiamme sono balzate vive agli occhi di tutti. Un certo momento ci siamo accorti che, come M. Jourdain faceva della prosa, senza accorgersene, anche noi facevamo, nella economia matematica, della dinamica senza rendercene conto. La teoria delle crisi, l'analisi del ciclo economico, il calcolo della correlazione fra quantità variabili nel tempo, erano, buone o cattive, indagini quantitative di dinamica. L'equazione dello scambio, che, proprio negli anni critici, si andava affermando come il pernio, intorno a cui si innesta la teoria della circolazione — la classica *Purchasing power of money* del Fisher è del 1911, — è una equazione di dinamica economica.

Un giorno un valoroso matematico americano, ben noto in Italia per essere stato alcuni anni tra noi, allievo del nostro Volterra, lo EVANS, diceva semplicemente: Perchè non supporre che la quantità comprata ad un certo prezzo sia funzione, oltre che di questo prezzo, della sua derivata rispetto al tempo? Non è esperienza quotidiana che chiunque deve fare una spesa, guarda non solo quale è il prezzo, ma ancora — e certe volte *sopra tutto*, — se il prezzo tende a crescere o a diminuire? Quel giorno si battezzava la equazione differenziale della domanda. Ma il nato già c'era da tempo, perchè da tempo calcolavamo la correlazione lineare non già fra il consumo $x$ ed il prezzo $p$ al tempo $t$, ma fra il rapporto di $x(t+\Delta t)$ a $x(t)$ ed il rapporto di $p(t+\Delta t)$ a $p(t)$, il che significa che scrivevamo una equazione alle differenze finite.

Con uguale semplicità lo stesso EVANS costruiva la teoria dinamica del monopolio, ponendo la condizione che il monopolista cerca di regolare la produzione in modo, da conseguire un beneficio massimo, non *pro tempore*, ma in relazione a tutta la quantità venduta da un istante iniziale ad un istante finale. Le incognite non sono più numeri, come nella teoria statistica del monopolio, ma funzioni del tempo, e vengono determinate dalla condizione di minimo di un certo integrale. Il problema è ricondotto al calcolo delle variazioni (1).

Più complicato, tanto dal punto di vista economico, quanto da quello matematico, è il problema dinamico considerato dal ROOS. Se la merce è prodotta, in condizione di monopolio, non da uno, ma da un piccolo numero di monopolisti, in modo, che la produzione di ciascuno sia una quantità che rispetto al totale non possa considerarsi infinitamente piccola ciascun produttore cercherà

di regolare la *sua* produzione, *indipendentemente da quella degli altri*, in modo da rendere massimo il *suo* beneficio, da un istante iniziale ad un istante finale. Se ne deduce che ciascuna delle funzioni incognite deve essere determinata in modo da corrispondere al massimo di un dato integrale, *in cui, sotto il segno di integrazione, figurano simultaneamente tutte le funzioni incognite*. Il ROOS ha tentato recentemente di risolvere il problema in generale, attraverso una teoria che ha detto *calcolo delle variazioni parziali*, e che non mancherà di attrarre l'attenzione dei matematici.

Tale sua soluzione lo stesso ROOS poi inquadra in una teoria generale della dinamica economica, che egli ricava dalla teoria statica di WALRAS, sostituendo appunto le sue equazioni differenziali a quelle classiche, che davano la uguaglianza del prezzo al costo di produzione (2).

3° - La costruzione del ROOS trae la sua forza dalla elaborazione di idee astratte e generali, assai più che dalla rappresentazione del fenomeno concreto. Di questo egli cerca dare una sintesi, che a me pare in manifesto contrasto con la secolare esperienza e con la intuizione generale della vita economica.

Ammetto invero che il movimento economico possa essere rappresentato cogli integrali di un sistema differenziale, od integrale, od integro differenziale; ma in tal caso penso che dovrebbero considerarsi variabili nel tempo ed *impreviste per il futuro* le funzioni che figurano come coefficienti delle equazioni del sistema. Ma se questo si fa, quegli integrali non sono atti alla previsione, in quanto contengono, nei riguardi del futuro, elementi incogniti. *Definiscono un ignotum per ignotum*. Che se poi invece si attribuissero agli stessi coefficienti i valori empirici tratti dalla esperienza del passato, comunque ciò si facesse, si verrebbe a pensare che condizioni oggi note sono capaci di determinare la storia *in fieri*; che l'istante attuale è gravido di tutto il futuro. Si verrebbe insomma a rappresentare la vita economica secondo una concezione determinista. Cioè secondo una filosofia, che esprime un errore secolare, antico quanto il mondo, che si ripete sempre sotto nuove forme, nonostante che la realtà ne abbia sempre infranto gli schemi, e la ragione abbia sempre bollato col nome di marionette quelle figure, non più umane, la cui storia futura può tutta leggersi nell'attimo che fugge. Il limite estremo cui ci consente di giungere la intuizione della libera natura umana sta nel postulare che il legame che sussiste fra il passato e il futuro, libero, quindi variabile nel tempo, ed indeterminabile dalle condizioni preesistenti, presenta, nel fenomeno di massa, una continuità nella variazione. Dal che discende che possiamo, in via di approssimazione, assumere per *l'immediato futuro* i valori empirici, quali sono dati dall'immediato passato; spingere il nostro sguardo fino alla valutazione della *direzione* del movimento *pro tempore*; scrivere, al più, le equazioni differenziali od integro differenziali della dinamica economica al solo scopo di determinare, *localmente nel tempo*, le

derivate, note le funzioni. Non quindi nell' intento di eseguire una integrazione, che non potrebbe darci e non ci dà il movimento futuro.

Il peccato del ROOS, se mi è consentito usare questo termine, è un peccato di orgoglio. Un peccato di angelismo, secondo la espressione felice di un illustre filosofo contemporaneo, JACQUES MARITAIN (3). Solo un angelo, puro spirito, materia incorporea, non soggetto alle debolezze e alla corruzione della natura umana, potrebbe leggere nel futuro, come vi leggerebbe chi possedesse gli integrali della dinamica economica. Solo un angelo, per cui non sussiste la contradizione che fermò il nostro antico Padre, quando scrisse: *State contente umane genti al quia.*

4° - Se ROOS pecca di orgoglio, ossia per *troppo di vigore*, un altro matematico americano, il MOORE, pecca invece per *poco di vigore.*

Anche lui ha costruito, presso a poco contemporaneamente al ROOS, una teoria generale, cui ha dato il nome di teoria delle fluttuazioni economiche, e con cui cerca di stringere il fenomeno dinamico. Il MOORE parte dalla osservazione, ormai familiare a tutti, che nell' alterna fluttuazione dei fenomeni economici, occorre distinguere il movimento secolare dalle fluttuazioni cicliche intorno al primo. Anche lui scrive le equazioni della dinamica, partendo dalle classiche equazioni dell' equilibrio di WALRAS, e sostituisce in esse, al posto delle coordinate che individuano in ogni istante la configurazione del sistema, il rapporto fra queste coordinate e quelle che esprimono il movimento secolare nello stesso istante. Ma il movimento secolare è determinato, empiricamente, interpolando i dati osservati con una linea retta o con una parabola. In tal modo non può aversi la rivelazione di una tendenza generale, ma solo la rappresentazione contingente del fenomeno, quale fu in media in un certo periodo del passato e quale non potrebbe *sic et simpliciter* essere proiettata nell' avvenire. Viene quindi a mancare lo strumento per ogni previsione, pur nei limiti ristretti, in cui, come ora dicevamo, è ragionevole proporsi una previsione.

Più che per questa rappresentazione sintetica, di cui non riesco a vedere la fecondità, il nome del MOORE si raccomanda all' attenzione di quanti amano gli studi economici per le belle ricerche particolari di economia induttiva — classiche quelle sul cotone — che sono esse sì vere e proprie indagini di dinamica economica (4).

Ho detto economia induttiva. Non so se, nel mondo matematico, sia giunta l' eco dell' esistenza di istituti, quali quelli dell' Harvard Economic Service, del London Economic Service, dell' Institut for Koniunkturforschung, ecc., che sono veri e propri osservatori economici, che hanno appunto lo scopo di seguire il movimento economico generale (movimento degli affari), di misurarne le correnti, di indurre dall' esperienza del passato previsioni per il prossimo avvenire. Sono in generale organi, che vivono di vita propria, alimentati dalle imprese industriali, interessate a conoscere le previsioni fatte, o almeno gli elementi su cui si basano.

Queste previsioni che possono essere oggi e saranno domani largamente approssimative e spesse volte fallaci, sono nondimeno espressione di qualche cosa di vivo e vitale, nata dalla pratica, impregnata di vita pratica. In esse vedo il *fondamentum sperimentale* della dinamica economica, quale si andrà piano piano costituendo. Compito dei teorici, oggi, non è quello di costruire, a freddo, a tavolino, teorie generali, ma di fiancheggiare questo movimento pratico, piano piano, senza squilli di tromba, per interpretare o per guidare.

5° - Maestro a tutti in siffatta regola di vita scientifica è l'americano Irving Fisher.

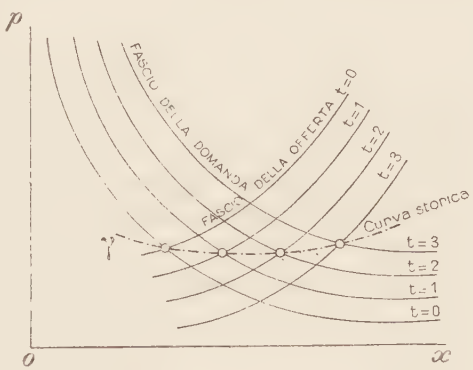
Sono universalmente note la profondità del suo pensiero, la chiarezza cristallina delle sue idee, la sobrietà e l'eleganza della sua esposizione, sempre viva e sempre piena di contenuto sperimentale.

La sobrietà degli sviluppi analitici, della quale il Fisher è continuo esempio, non è, a mio giudizio, una qualità formale. Essa implica sempre, ma segnatamente nel nostro campo, una questione di sostanza.

Non è vero che le formule non abbiano un costo. Il loro costo si esprime in termini della loro applicabilità ai fenomeni concreti, e questa applicabilità è tanto minore, quanto è maggiore il numero dei segni, in cui esse si rappresentano. In generale, e non solo nel campo della economia, una formula è tanto più feconda, quanto più è semplice.

Ed, aggiungo, quanto più è elegante, cioè quanto più è capace di far afferrare, senza sforzo, un grande numero di fatti. Essa è formula, cioè una forma, nel senso che si dà a questa parola nella filosofia aristotelica, o, se preferite, nella Somma di S. Tommaso.

A questi criteri di semplicità intendo ispirarmi, nel rappresentarvi — nei limiti in cui le mie forze me lo consentono — la teoria dinamica della domanda e dell'offerta, in condizioni di concorrenza.




## II.

6° - Partiamo dallo schema classico della domanda e dell'offerta, nella sua ben nota rappresentazione geometrica. Riportiamo sulle asse coordinate il prezzo $p$ e la quantità $x$, che si vende a quel prezzo, e tracciamo la curva che esprime la legge statica della domanda.

Ma la quantità venduta ad un certo prezzo varia in generale col variare del tempo. Rappresentiamo geometricamente siffatto dinamismo, tracciando non una

curva, ma un fascio di curve di domanda, ciascuna delle quali corrisponda ad un dato valore di $t$. Ed analogamente dicasi per l'offerta.

Il luogo delle intersezioni di due curve del fascio corrispondenti allo stesso $t$ rappresenta nel piano una linea $\gamma$, che è la traiettoria storica. Le sue equazioni parametriche rispetto a $t$ ci danno le fluttuazioni dei prezzi e delle quantità: cioè la legge del moto economico.

La conoscenza della traiettoria storica, anche se espressa sotto la forma parametrica, ora indicata, *non sufficit*, per determinare i due fasci delle curve di domanda e di offerta.

L' asserto geometricamente evidente risulta tale anche algebricamente, ove si rifletta che, se il movimento dei prezzi e delle quantità è espresso, per esempio, dalle equazioni

$$x=100+2t \qquad p=200-t \tag{1}$$

esistono *infinite* leggi di domanda e di offerta che possono produrre questo movimento.

Tali sono, per esempio,

$$\begin{aligned} x+hp&=100(2h+1)+(2-h)t \\ hx-p&=100(h-2)+(2h+1)t \end{aligned} \tag{2}$$

qualunque sia il parametro $h$.

Ne consegue che ogni tentativo per ricavare la legge della domanda, basandosi *unicamente* sulla conoscenza del movimento empirico dei prezzi e delle quantità, non può non essere fallace. E che non avrebbe senso appoggiarsi su un coefficiente di correlazione per concludere, per es., che vi sono 80, o 70, o 60 probabilità su 100 che la equazione della curva della domanda sia quella, cui la correlazione si riferisce. Nel caso sopra considerato, la correlazione espressa da

$$x+2p=500 \tag{3}$$

presenta una probabilità del cento per cento, e tuttavia essa non è la curva di domanda.

7° - Dunque perchè la domanda (ed analogamente dicansi per l'offerta) sia determinata, occorre dare, oltre al movimento empirico dei prezzi e delle quantità, delle condizioni complementari.

Esse debbono essere espresse come postulati.

Vi sorprenderà forse, se aggiungo, che tali postulati *non sono suscettibili di verifica empirica*. Ma la sorpresa si dilegua, se riflettete che domanda e offerta **non sono un dato sperimentale**, *sono un'astrazione creata dalla nostra mente*, che ha il suo fondamento, non già nell'osservazione dei fatti reali, ma nella presunzione di fatti virtuali, da noi giudicati possibili.

In ogni istante, sopra un dato mercato, l'esperienza ci dà un punto della curva di domanda; può discutersi, se ci dia ancora la tangente alla curva in quel punto. In ogni modo non ci dà altro.

La legge della domanda non è quindi una legge empirica. *È una categoria mentale*, che ha la sua origine nella intuizione dei fondamenti psicologici della nostra condotta economica. Uno schema astratto, che ci consente di abbracciare sinteticamente il campo del possibile, e ci aiuta nella previsione dell'avvenire.

Non esiste pertanto un problema della *verifica sperimentale delle leggi della domanda* o della *ricerca empirica delle leggi della domanda*. Esiste solo il problema di creare una formula, atta alla sintesi ed alla previsione.

Ho detto una formula. Avrei dovuto dire una o più. La sintesi e la previsione non sono vincolate ad uno schema unico, il che non può stupire il matematico, che sa che, per esempio, il movimento dei pianeti può spiegarsi, tanto partendo dalla ipotesi delle azioni a distanza, quanto da quella di tensioni superficiali in un mezzo continuo.

La previsione che è ragionevole tentare nel campo economico, come dicevamo prima, non può essere che *puntuale*. Si rivolge cioè ad un futuro immediatamente prossimo. Posso propormi di prevedere quale sarabbe il prezzo del vino in Italia, in media, nel secondo semestre di questo anno, ammesso che il raccolto della vendemmia di questo settembre fosse 15, e quale sarebbe invece se il raccolto fosse 20. Sarebbe pazzesco propormi l'analoga previsione non dico per il 1950, ma neanche per il 1930 e nemmeno per il 1929. La previsione economica, in generale, non può andare al di là di qualche mese: tre, cinque, sei, dodici al più. Al limite, sostituendo un fenomeno continuo al discontinuo, consente di determinare le derivate, note le funzioni.

Ed appunto perchè è puntuale e deve quindi in ogni istante essere rettificata, occorre uno strumento, capace di servire *subito*, di dare *in ogni momento* quel che può, *rapidamente*, senza troppo lunghe e faticose calcolazioni.

8° - È a questo punto che si dimostra tutta la fecondità del concetto di equazione differenziale della domanda.

Ho già detto che una equazione siffatta è stata scritta, esplicitamente, la prima volta, dallo EVANS (1). La equazione da lui considerata è una particolare equazione differenziale lineare del primo ordine a coefficienti costanti. Il ROOS (2) è andato oltre. In un primo tempo ha pensato la quantità venduta $x$ funzione generica di $p$ e di $p'$. In un secondo tempo ha identificato questa dipendenza con quella dei fenomeni ereditari, ed ha scritto $x$ come una funzionale nel senso di VOLTERRA-HADAMARD.

Teoricamente la concezione del ROOS è accettabile. Praticamente è infeconda. Essa ci offre un'arma, con cui non sappiamo, almeno oggi, tirare. Del resto il salto dalle equazioni algebriche ai funzionali è troppo lungo. In questo, come in

tutti i campi dell'attività scientifica, occorre procedere per gradi. È già un gran passo concepire la equazione della domanda come equazione differenziale. Fermiamoci oggi ad essa.

Si presenta allora spontaneamente l'idea di assumere per equazione della domanda una espressione differenziale del primo ordine lineare a coefficienti costanti, e sarebbe facile dimostrare che è una forma teoricamente possibile, nel senso che non contrasta col concetto che abbiamo della domanda ([5]).

Siffatta possibilità teorica peraltro è condizione necessaria, non sufficiente. Occorre che questa forma sia ancora in accordo coll'esperienza. Poichè se è vero — come poco fa dicevamo — che l'esperienza non è sufficiente a determinare, da sola, la equazione della domanda, è peraltro vero altresì che essa *pone dei vincoli* alla infinita varietà delle forme teoricamente possibili.

*Ora la esperienza non ha confermato*, almeno finora, la forma lineare, in quanto valori di $x$ e di $p$, empiricamente ricavati dalle statistiche di consumi e di prezzi, non sono stati interpolati da una espressione differenziale lineare del primo ordine a coefficienti costanti.

Anzichè partire da una forma teoricamente possibile e sottoporla poi al vaglio della esperienza, partiamo allora da forme empiricamente accertate, e scegliamo, fra queste, quella o quelle, che sono teoricamente possibili.

Ho già detto che è stata da tempo statisticamente accertata, con buona approssimazione, una correlazione lineare, fra i rapporti

$$\frac{\Delta x}{x \Delta t}, \qquad \frac{\Delta p}{p \Delta t},$$

cioè una correlazione della forma

$$\frac{\Delta p}{p} + a \frac{\Delta x}{x} = \gamma \Delta t$$

o anche, sostituendo alle differenze i differenziali

$$\frac{p'}{p} + a \frac{x'}{x} = \gamma \tag{4}$$

$a$, $\gamma$ essendo delle costanti ([6]).

Tutto si riduce allora a vedere se la forma (4) è teoricamente possibile.

È subito visto che lo è, in quanto la (4) implica che per $dt = 0$, è costante il rapporto

$$\frac{dx}{x} \div \frac{dp}{p},$$

che misura la elasticità della domanda. Ed è questa una ipotesi, che non è in contrasto con la nostra intuizione teorica della domanda ([7]).

Questa intuizione ci pone solo la condizione ben nota che la elasticità deve essere negativa (se il prezzo cresce il consumo diminuisce e viceversa) onde il vincolo $a > 0$.

## III.

9° - Scriveremo la equazione differenziale della offerta sotto la forma

$$p' + hp = a + bx + cx' \tag{5}$$

$a, b, c, h$, essendo delle costanti, di cui $b, c, h$, essenzialmente positive.

Le ragioni su cui poggia la formula (5) sono le seguenti.

Anzitutto è fatto di esperienza quotidiana che i prezzi, in ogni istante, dipendono, in generale non solo dalle quantità disponibili in quell' istante, ma ancora, e certe volte questa seconda dipendenza è prevalente, dalle quantità che si presume saranno disponibili in un futuro prossimo. Ciò avviene in generale pei prodotti agricoli, quanto per quelli industriali; nelle grande borse, come nei piccoli mercati regionali; pei prezzi all' ingrosso, come per quelli al minuto. La (5) è la forma differenziale più semplice che tiene conto di questa dipendenza.

Ma perchè sia teoricamente possibile, essa deve, per $dt = 0$, definire $x$ come funzione *crescente* di $p$. Laonde $c > 0$.

Di più per $p =$ costante la (5) ci da

$$bx + cx' = \text{costante}$$

ci dice cioè che, se i prezzi sono stazionari, la quantità prodotta non resta stazionaria, ma varia. Ciò non è certamente in contrasto con la esperienza, la quale effettivamente ci rivela per molti versi che esiste nel complesso economico qualche cosa che è analogo a quello che è l' *inerzia* in meccanica. Solamente, perchè si tratti effettivamente di inerzia, occorre che le fluttazioni della quantità, in regime di stazionarietà dei prezzi, vadano smorzandosi nel tempo. Perchè ciò sia, debbono $b, c$ essere dello stesso segno, quindi $b > 0$.

Analogamente perchè, in regime di stazionarietà della produzione, possano le fluttazioni dei prezzi considerarsi come manifestazioni di una inerzia economica, deve essere $h > 0$.

Spiegate le ragioni delle limitazioni poste ai segni delle costanti, passiamo a vedere quale è il significato economico della (5). Mostreremo che essa esprime la considerazione fondamentale della produzione, in regime di concorrenza, cioè l' adattamento del prezzo al costo marginale.

Invero, ove si consideri il fenomeno dinamico, il costo totale di produzione $\Theta$ deve pensarsi non solo funzione della quantità prodotta $x$, ma anche della derivata di $x$ rispetto al tempo, cioè di $x'$. In prima approssimazione, ed in analogia a quanto si usa forse nel caso statico, supponiamo che $\Theta$ sia una funzione quadratica di $x$ e di $x'$. Avremo così:

$$\Theta = a_{11} x^2 + 2a_{12} xx' + a_{22} x'^2 + 2a_{13} x + 2a_{23} x' + a_{33} \tag{6}$$

E poichè è fatto di esperienza quotidiana, nel campo dell' agricoltura, come dell' industria, che l' incremento del costo, per l' accelerarsi del ritmo della pro-

duzione, anche se decresce in primo momento, finisce sempre, prima o poi, per crescere, ne viene che $a_{12}$ ed $a_{22}$ debbono essere quantità positive, e quindi la derivata parziale di $\Theta$ rispetto ad $x'$ è una funzione lineare (in generale non omogenea) di $x$ e di $x'$, in cui sono positivi i coefficienti di $x$ e di $x'$.

Ma l'adattamento del prezzo al costo marginale, in dinamica, deve interpretarsi, come adattamento *del valore attuale del prezzo previsto*, onde il costo marginale, cioè la derivata di $\Theta$ rispetto ad $x'$, deve essere uguale non a $p(t)$, ma a

$$p(t+\tau)e^{-i\tau} \tag{7}$$

$i$ essendo il saggio d'interesse, e la base dei logaritmi naturali, $\tau$ il ciclo della previsione, cioè, il periodo cui la previsione si riferisce.

Quindi $i$, $\tau$ sono costanti positive.

Per $\tau$ sufficientemente piccolo (7) può scriversi

$$mp+np',$$

$m$ ed $n$ essendo quantità positive costanti rispetto a $t$. Uguagliando questa espressione ad una funzione lineare di $x$, $x'$, in cui i coefficienti di $x$ ed $x'$ siano positivi, esprimenti, come poco fa dicevamo, il costo marginale dinamico, ne deriva una espressione come la (5), in cui i segni dei coefficienti sono quelli sopra indicati.

La (5) può essere illuminata da un terzo punto di vista. È noto che, partendo dal problema della costruzione di un barometro economico, lo IRVING FISHER è stato condotto a domandarsi, se esistesse una correlazione fra l'indice generale dei prezzi $P$ e il volume dell'attività commerciale $T$. Ragioni teoriche facevano presumere l'esistenza di siffatta correlazione; i produttori allargano la produzione se i prezzi mostrano una tendenza al rialzo, e la contraggono, se mostrano, una tendenza al ribasso. La esperienza fatta dal FISCHER colla consueta maestria, per il mercato americano dal 1877 al 1924, ha confermato la previsione. In prima approssimazione la correlazione è stata da lui scritta linearmente nella forma

$$P'_{t-\omega}=a+bT_t \tag{8}$$

In seconda approssimazione è stata espressa scrivendo che $T$ dipende, sempre linearmente, da tutti i valori di $P'$ per tutto un ciclo che ha il suo estremo destro nall'istante attuale, cioè scrivendo che $T$ è una funzione di linea di primo grado ([8]).

Riferita ad un'unica merce, l'equazione (8) si scrive

$$p'=a+bx+cx' \tag{9}$$

ed è evidentemente un caso particolare di (5).

Ma la (5) non è in generale un differenziale esatto. Ciò significa che in generale $x$ non si esprime per $p$ in termini finiti, ma è una funzione di linea,

appunto in armonia al concetto considerato dal FISHER in seconda approssimazione.

Una verifica sperimentale diretta di (7) è contenuta in uno studio da me presentato all'Istituto Nazionale delle Assicurazioni (9).

10° - Raccogliendo, le equazioni differenziali del movimento economico nel caso di un'unica merce possono scriversi

$$(10) \qquad \begin{cases} \dfrac{p'}{p} + \alpha \dfrac{x'}{x} = \gamma \\ p' + hp = a + bx + cx' \end{cases}$$

$\alpha$, $\gamma$; $a$, $b$, $c$, $h$ essendo delle costanti, tutte positive, tranne $a$ e $\gamma$ che possono essere positive e negative.

È un sistema differenziale del primo ordine, lineare rispetto a $p'$ e ad $x'$, il cui determinante per i segni ora indicati delle costanti e per essere $x$, $p$ positive (in ragione del loro significato economico) è sempre diverso da zero.

La previsione puntuale si ricava direttamente da (10), determinando i parametri che ivi figurano mediante un conveniente numero di osservazioni.

Essa ha la sua base nei fondamenti teorici e sperimentali, più avanti indicati separatamente, per la equazione della domanda e per quella dell'offerta.

## NOTE

(1) G. C. EVANS. *The dinamics of monopoly.* The American Mathematical Montly. Vol. XXXI, N. 2, february 1924, pag. 77-83.

È da osservare pertanto che in questa nota dello EVANS non si tiene conto, nella valutazione del beneficio (profitto), del cumulo degl'interessi composti.

Vi è inoltre da osservare che la forma proposta dallo EVANS, come equazione differenziale della domanda è

$$(11) \qquad x = ap + b + hp'$$

in cui $x$ indica la quantità domandata, $p$ il prezzo, $p'$ la derivata di $p$ rispetto al tempo $t$; le $a, b, h$, costanti arbitrarie.

Ora è facile vedere che la forma (11) non è teoricamente possibile, in quanto se moltiplichiamo ambo i membri per $dt$, e poniamo poi $dt = 0$, ricaviamo $dp = 0$, il che vorrebbe dire che la curva statica della domanda (cioè la curva della domanda quale è ordinariamente considerata nella economia classica) è una parallela all'asse delle quantità.

(2) C. F. ROOS. *Generalized Lagrange problems in the calculus of variations.* Transactions of the American Mathematical Society. Vol. 30, N. 2, april 1928. *A dinamical theory of economics.* The Journal of Political Economy. Vol. XXXV, N. 5, october 1927.

(3) J. MARITAIN. *Trois reformateurs: Luther, Descartes, Rousseau.* Paris, Plon, 1926, pag. 75-131.

(4) H. L. MOORE. *A theory of economic oscillation.* The Quarterly Journal of Economics. Vol. XLI, nov. 1926. — *Elasticity of demand and flexibility of prices.* Journal of the American Statistical Association. March 1922. — *Generating Economic Cycles.* New York, 1923.

(5) Se infatti come equazione differenziale della domanda assumiamo la più generale equazione lineare a coefficienti costanti

$$p' + hx' = a + bx + cp$$

$x$ essendo al solito la quantità domandata, $p$ il prezzo, $x'$ e $p'$ le derivate di $x$ e $p$ rispetto a $t$, la costante $h$ essendo positiva, otteniamo per $dt = 0$

$$p + hx = \text{costante}$$

la quale, come equazione statica della domanda (cioè come espressione della ordinaria linea di domanda) è teoricamente possibile, se, come abbiamo supposto, è $h > 0$.

(6) Come è noto MOORE ha considerato il rapporto inverso della elasticità

$$\frac{dp}{p} \div \frac{dx}{x}$$

cui ha dato il nome di *flessibilità dei prezzi*, ed ha fatto l'ipotesi più generale che essa sia una funzione lineare del consumo.

Accettando questa estensione, ne deriva per la equazione differenziale della domanda la forma

$$\frac{p'}{p} + (\alpha + \beta x)\frac{x'}{x} = \gamma$$

$\alpha > 0$, $\beta > 0$, che comprende evidentemente la (4) come caso particolare, e che può anche essere generalizzata scrivendo simmetricamente

$$(\alpha + \beta p)\frac{p'}{p} + (\gamma + \delta x)\frac{x'}{x} = \varepsilon$$

$\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, $\varepsilon$, essendo costanti, di cui le prime quattro positive.

(7) Che l'esistenza di una correlazione lineare tra l'incremento percentuale del consumo e l'incremento percentuale del prezzo implica la ipotesi che la elasticità della domanda sia costante, non mi pare era stato finora osservato.

Nella memoria H. SCHULTZ : *The Statistical Law of Demand*, per molti versi assai pregevole, pubblicata nel vol. 33 del Journal of Political Economy (october - december 1925) non sono corretti, a mio giudizio, gli sviluppi analitici della pag. 587, in cui $x_0$, $y_0$ variabili rispetto al tempo sono invece considerati costanti agli effetti della derivazione. Da questo errore deriva che la elasticità della domanda appare allo S. variabile da punto a punto, mentre invece essa è costante. Dalla stessa causa derivano le contradizioni, rilevate dallo stesso S., alle pagine 604 - 606.

(8) J. FISHER. *Our unstable dollar and the so called bussines cycle.* Journal of the American Statistical Association, june 1925.

(9) Sarà pubblicato in appendice alla mia conferenza: *Sui barometri economici*, nel volume di prossima pubblicazione, in cui saranno raccolte le conferenze tenute all'Istituto Nazionale delle Assicurazioni nel 1928.

MAURICE FRÉCHET

# L'ANALYSE GÉNÉRALE ET LES ESPACES ABSTRAITS

— Si j'ai choisi pour sujet de cette conférence l'Analyse générale et la Théorie des Ensembles Abstraits, ce n'est pas seulement parce que c'est un des sujets qui ont le plus occupé mon attention. C' est surtout parce qu'il y a là une branche des sciences encore peu connue.

Le peu de temps dont je dispose m'empêchera d'entrer dans les précisions que permettraient les résultats déjà acquis. Et je m'excuse auprès de ceux d'entre vous déjà au courant des fondements de ces théories, de les condamner à entendre des généralités. Peut-être celles-ci suffiront-elles cependant à intéresser au sujet de cette conférence, de jeunes mathématiciens qui cherchent leur voie et n'ont pas eu l'occasion de sortir de l'Analyse classique.

J'ai dit que ce sujet est encore peu connu : il ne remonte guère en effet à plus d'une vingtaine d'années. Toutefois sa naissance ne doit pas être considérée comme due à une génération spontanée. Et c'est bien ici le lieu de rappeler que l'Analyse générale n'aurait guère pu être même conçue sans les travaux des mathématiciens italiens et particulièrement de deux d'entre eux : MM. PINCHERLE et VOLTERRA. Mon intention première était de leur rendre le meilleur des hommages en rappelant les traits principaux de leurs oeuvres. Mais M. HADAMARD les a si bien résumés et situés dans sa brillante conférence que je ne saurais être tenté de mieux faire.

— Et maintenant, me direz-vous, en quoi se distingue cette Analyse générale de l'Analyse fonctionnelle ?

L'Analyse fonctionnelle — et j'emploie ici l'heureuse locution introduite par M. PAUL LÉVY — a pour objet principal, l'étude des propriétés infinitésimales des fonctions numériques dont la variable est, soit une ligne — et on a alors ce que M. VOLTERRA appelle une fonction de ligne —, soit une fonction ordinaire — et on a alors ce que M. HADAMARD appelle une fonctionnelle.

Dans l'Analyse générale, la variable n'est plus nécessairement une ligne, ni une fonction ordinaire, ce n'est pas non plus une des variables de nature déterminée que la science amène à considérer comme l'argument d'une fonction. La variable n'est pas nécessairement une surface, ou une suite infinie de nombres, ou une transformation. C'est une variable abstraite. Mais il ne s'agit pas d'intro-

duire ici quelque chose de mystérieux ; si j'emploie cette expression, c'est simplement parce que c'est celle qui exprime le mieux l'idée que j'ai en vue.

Si, par exemple, je dis que je veux ajouter les nombres 8 et 3, vous ne m'accuserez pas d'ignorance parce que je n'ai pas spécifié que 8 est un nombre pair et 3 un nombre impair. Ce sont des détails que je connais, mais qui me sont indifférents au moment où je me dispose simplement à calculer la somme de ces nombres. Cette non-intervention de toutes les propriétés dans un problème déterminé est ce qui justifie la considération des éléments abstraits.

Un élément abstrait, est, soit un élément dont la nature est indéterminée, soit un élément dont on connait parfaitement la nature, mais dont, provisoirement, on n'a pas besoin de faire entrer la nature en ligne de compte.

La notion d'élément abstrait a cette utilité de ne faire intervenir la nature de la variable qu'au moment où cette intervention devient nécessaire et par suite de ne pas limiter à l'avance le champ d'application des résultats obtenus. Elle permet en outre d'éviter la répétition de raisonnements entièrement similaires dans une suite de théories parallèles, comme l'évite par exemple l'Analyse vectorielle pour les théories des forces, des vitesses, des moments, etc. Enfin l'usage des éléments abstraits peut intéresser le philosophe ([1]), puisqu'il permet de mettre mieux en lumière le rôle de chacune des hypothèses qui entrent dans une démonstration.

Nous avons dit que l'Analyse générale étudie les fonctions numériques $y=f(x)$ d'une variable abstraite $x$. Mais une relation fonctionnelle $y=f(x)$ est aussi une *transformation* de la variable $x$ dans la variable $y$. Pourquoi établir une distinction de principe entre $x$ et $y$, pourquoi être général pour $x$ et particulier pour $y$? Pourquoi $y$, au lieu d'être un nombre, ne serait-il pas lui aussi un être abstrait?

Et nous arrivons ainsi à la conception d'une science, l'Analyse générale, qui aurait pour objet l'étude des transformations $y=f(x)$ d'un être abstrait $x$ en un être abstrait $y$.

— Mais il y a autre chose qui distingue l'Analyse générale de l'Analyse fonctionnelle. Celle-ci — MM. HADAMARD et VOLTERRA vous l'ont bien montré, — s'est trouvée guidée, et guidée à juste titre, par le souci de résoudre les nombreux problèmes posés par l'Analyse classique à l'Analyse fonctionnelle. L'Analyse fonctionnelle a résolu ces problèmes en bâtissant une théorie des fonctions de lignes, une théorie des fonctionnelles. Ces théories se sont développées parallélement, latéralement à l'Analyse classique, les nouvelles prenant modèle sur l'ancienne.

La conception même de l'Analyse générale devait engendrer une méthode différente.

---

([1]) Revue de Métaphysique et de Morale: *L'Analyse générale et les ensembles abstraits*, 1925, t. 32, p. 1-30.

Puisque la variable indépendante, $x$, et la variable-fonction, $y$, sont abstraites, c'est à dire puisque leur nature est arbitraire, tout résultat les concernant doit s'appliquer en particulier lorsque $x$ et $y$ sont des nombres. Dès lors, tout résultat obtenu en Analyse générale doit, *ipso facto*, s'appliquer à l'Analyse classique. Toute une partie de l'Analyse classique devient un cas particulier de l'Analyse générale. Nous n'avons plus deux sciences parallèles. Nous avons une science, l'Analyse générale qui, dans un ordre logique — je ne dis pas dans un ordre pédagogique — devrait précéder l'Analyse classique et dispenser d'une partie de celle-ci. Ce point de vue a été bien mis en lumière par le savant professeur américain E. H. Moore et c'est même dans ce but qu'il a créé l'heureuse dénomination d'Analyse générale que je lui ai empruntée.

La circonstance que je viens de préciser n'est d'ailleurs pas nouvelle dans la Science. J'ai déjà rappelé l'exemple de l'Analyse vectorielle. La théorie des groupes abstraits offre aussi l'exemple d'une science qui, au moins logiquement, sinon pédagogiquement, devrait précéder les théories des groupes de diverses natures et dispenser d'une partie de chacune d'elles.

La considération des éléments abstraits remonte même encore bien plus loin. L'arithmétique des peuples les plus primitifs n'est-elle pas, sous une forme évidemment inconsciente, l'étude des propriétés communes à des ensembles d'éléments abstraits? Qu'est-ce que le nombre cinq, sinon un mot fait pour désigner une propriété commune à tous les ensembles d'éléments abstraits qui peuvent être mis en correspondances biunivoques avec les cinq doigts de la main? Ces éléments peuvent être des pommes, des arbres, des sons, — tout sauvage acceptera que leur nombre soit indépendant de leur nature, pourvu qu'ils soient discernables. C'est cette conception abstraite du nombre cardinal fini qui a permis à Cantor de généraliser la notion de nombre cardinal et de définir des nombres cardinaux infinis.

— Seulement une difficulté se présente lorsque l'on veut passer de l'extension de l'Arithmétique à l'extension de l'Analyse.

Il faut donner un sens, pour des éléments abstraits, aux notions de voisinage, de limite, de distance, de continuité. Tant qu'on reste dans l'Analyse fonctionnelle, la difficulté n'est pas excessive. L'Analyse classique impose tout naturellement un sens à ces notions quand on opère dans tel ou tel champ fonctionnel. Par exemple (1), si l'on s'occupe de fonctions continues, de fonctions mesurables, de fonctions de carrés sommables, la définition de la convergence d'une suite de ces fonctions qui se présentera d'elle-même dans la plupart des applications sera dans le premier cas, la convergence uniforme, dans le second cas, la convergence en mesure, dans le troisième cas, la convergence en moyenne.

---

(1) *Sur divers modes de convergence d'une suite de fonctions d'une variable.* (Bull. Calcutta Mathem. Soc., 1921, vol. 11, p. 187-206).

Il ne peut plus en être de même dans l'Analyse générale. On ne peut songer à donner une définition de la limite ou du voisinage d'éléments dont la nature nous est inconnue, du moins, on ne peut en donner une définition *constructive* complète et générale. Mais on peut tourner la difficulté en énonçant des définitions *descriptives* et incomplètes.

On ne donnera pas le moyen de reconnaitre si une suite d'éléments abstraits est convergente. Mais, des définitions courantes de la distance, de la limite, du voisinage, on extraira des conditions auxquelles satisfont ces définitions. Ces conditions devront: d'une part, être exprimables en un langage indépendant de la nature des éléments; d'autre part, être celles qui interviennent essentiellement dans les démonstrations.

— Nous donnerons deux exemples, celui du voisinage, et celui de la distance.

Dans la théorie classique des ensembles, on peut dire qu'un élément d'accumulation d'un ensemble linéaire, d'un ensemble plan, etc., est un élément $a$ dans tout voisinage duquel il existe des éléments distincts de $a$ et appartenant à l'ensemble considéré. Cette définition ne fait intervenir la nature des éléments de l'ensemble qu'au moment où l'on prononce le mot voisinage. Sur la droite, les voisinages d'un point $a$ sont, par exemple, les intervalles de milieu $a$, dans un plan, ce sont, par exemple, les cercles de centres $a$, etc.

Dans un espace abstrait, on pourra se contenter de supposer que les voisinages de $a$ sont certains ensembles d'éléments attachés à $a$.

On pourrait se demander s'il est possible d'obtenir des résultats de quelque valeur que ce soit en n'imposant aucune limitation aux choix des ensembles qui seront considérés comme voisinages de ce point.

On obtiendra évidemment des résultats plus nombreux et plus précis en imposant des limitations convenables à ce choix des voisinages. Parmi les choix les plus utiles des voisinages, doit figurer celui-ci: pour chaque nombre $\varrho > 0$, on appellera voisinage de $a$ d'indice $\varrho$, l'ensemble des éléments dont la distance à $a$ est $\leq \varrho$. Ceci suppose d'ailleurs qu'on a défini la distance ou l'écart de deux éléments abstraits [1]. Mais cette définition m'entrainerait trop loin, et, comme elle est plus connue que la définition précédente du voisinage, je n'y insisterai pas.

D'autres limitations du choix des voisinages, plus générales que la précédente, ont été proposées. Par exemple, M. HAUSDORFF a défini sous le nom d'espaces topologiques, des espaces intéressants, en imposant au choix des voisinages des conditions très naturelles et très simples.

Je voudrais cependant attirer votre attention sur un fait qui vous étonnera peut-être, qui en tous cas m'a personnellement surpris. Même en n'imposant aucune

---

[1] *Sur quelques points du Calcul Fonctionnel*, p. 30. (Rend. Circ. Matem. Palermo, 1906, t. 22, p. 1-74).

espèce de condition aux choix des ensembles qui seront considérés comme voisinages d'un point, on réussit à généraliser un nombre remarquable de propositions de la théorie des ensembles euclidiens et de la théorie des fonctions de variables. Ce nombre même m'enlève toute possibilité de vous en faire l'énumération.

Nous venons de signaler quelques unes des questions de principes qui se posent dans la théorie des ensembles abstraits et d'indiquer certaines façons de les résoudre. On pourrait nous dire : mais l'Analyse générale n'est-elle pas votre objet principal ? Et alors, ne pourriez-vous suivre l'exemple des premiers analystes qui ont su obtenir les propriétés les plus utiles des fonctions bien avant qu'on eut même songé à étudier celles des ensembles de points ?

M. HADAMARD a devant vous évoqué cette objection et, en quelques mots, en a fait justice. Il pouvait d'autant mieux être bref que, dans un mémoire prophétique sur le Calcul fonctionnel publié en 1912 dans l'*Enseignement Mathématique*, il avait prévu cette objection et y avait répondu plus en détail.

M. HADAMARD faisait déjà remarquer que la connaissance intuitive du continu linéaire ou spatial a pu suffire aux premiers analystes, que par contre, notre ignorance du continu fonctionnel nous oblige à en faire une théorie rigoureuse si nous voulons asseoir l'Analyse fonctionnelle sur une base solide. Mais combien cette réponse décisive prend de force dans l'Analyse génerale !

Nous ne connaissons pas intuitivement les propriétés du continu fonctionnel, *mais nous savons au moins que les éléments de ce continu sont des fonctions.* Dans l'Analyse générale, nous ne connaissons même pas la nature des éléments des continus à étudier !

— Depuis quelques années, plusieurs mathématiciens appartenant à des nationalités diverses, se sont occupés de l'élaboration de cette Théorie des *ensembles fonctionnels* que réclamait M. HADAMARD. Ils se sont même attaqués à la construction d'une Théorie des *ensembles abstraits*, plus nécessaire encore à l'Analyse générale. Grâce à eux, la Théorie des Espaces Abstraits n'est plus une conquête à entreprendre, elle contient déjà un bel ensemble de propositions. Encore loin d'avoir atteint une forme définitive, cette théorie est assez avancée pour qu'on aie pu songer à en faire un exposé didactique et cohérent. C'est ce que, sur l'invitation de M. ÉMILE BOREL, je me suis efforcé de réaliser dans un des volumes de sa célèbre Collection de monographies sur la Théorie des Fonctions. Si j'étais assez heureux pour donner à quelques uns d'entre vous, le désir d'obtenir des précisions qui manquent nécessairement à cette courte conférence, je les renverrais à ce livre qui vient de paraitre à la librairie Gauthier-Villars sous le titre : « *Les Espaces Abstraits* et leur théorie considérée comme *Introduction à l'Analyse Générale* ». La liste bibliographique d'environ 150 travaux qui termine ce livre permet, en outre, de remonter aux mémoires originaux.

Mon livre, comme son titre l'indique, a pour objet principal de préparer à

l'étude de l'Analyse générale. Cette nouvelle discipline est moins avancée que la Théorie des Espaces Abstraits. Mais elle n'en présente pas moins d'intéressants résultats. Je signale d'abord l'étude des transformations abstraites continues. Soit $y = F(x)$ une transformation d'un élément abstrait $x$ en un élément abstrait $y$. On dira que cette transformation est continue au point $x_0$, si $F(x)$ est voisin de $F(x_0)$, lorsque $x$ est voisin de $x_0$; ou en termes plus précis: si pour tout voisinage $V_{y_0}$ de $y_0 = F(x_0)$, il existe un voisinage $V_{x_0}$ de $x_0$, tel que l'élément abstrait $y = F(x)$ appartienne à $V_{y_0}$ quand l'élément abstrait $x$ appartient à $V_{x_0}$.

On voit que la théorie des transformations continues est si intimement liée à la théorie des espaces abstraits que les progrès de la seconde doivent réagir immédiatement sur la première.

Il n'en est pas de même de l'intégration abstraite et de la différentiation abstraite. Ces deux notions se trouvent avec la topologie des espaces abstraits dans des relations opposées.

Je précise:

M. Radon avait obtenu une définition intéressante de l'intégrale euclidienne en généralisant convenablement et simultanément les notions d'intégrales dues à Stieljes et à M. Lebesgue. En poussant jusqu'au bout sa généralisation, en s'inspirant aussi des remarquables méthodes de M. Young, on arrive à définir l'intégrale d'une fonctionnelle sur un ensemble abstrait ([1]). Et ceci peut être fait indépendamment de la notion de voisinage adoptée sur cet ensemble abstrait.

Ces notions de voisinages, superflues pour définir l'intégration, deviennent, par contre, insuffisantes quand on s'attaque à la différentiation abstraite.

Il ne suffit pas alors qu'on puisse dire si un accroissement de la variable est petit, c'est-à-dire si une des positions de la variable est voisine d'une autre. Il faut encore qu'on puisse retrancher la différentielle de $y$ de l'accroissement de $y$, il faut savoir ce qu'on entendra en disant que le résultat de la soustraction est infiniment petit par rapport à l'accroissement de la variable abstraite $x$.

Il semble difficile de pouvoir donner un sens à cette condition sans supposer que les espaces — distincts ou non — où se meuvent $x$ et $y$, ont non seulement un caractère topologique, mais encore un caractère vectoriel, (ces deux caractères devant d'ailleurs être liés l'un à l'autre de façon naturelle).

A ce sujet, je tiens à faire une observation. Le génie de Lagrange a su établir les équations fondamentales du Calcul des Variations grâce à un artifice habile: l'introduction des familles de fonctions dépendant d'un paramètre numérique arbitraire.

Mais ce procédé ne consiste pas moins à utiliser un élément étranger à la question traitée. J'estime que, pour remplir toute sa mission, la différentielle

([1]) *Sur l'intégrale d'une fonctionnelle étendue à un ensemble abstrait.* (Bull. Soc. Math. France, 1915, t. 43, p. 248-265).

d'une fonctionnelle doit avoir pour variable indépendante, un accroissement entièrement arbitraire de la variable, dans le domaine de variation de cette variable ([1]).

Il m'a été très agréable d'apprendre dans une conversation toute récente avec M. SEVERI, qu'incidemment, les réflexions de ce grand géomètre sur ce sujet l'avaient amené à la même conclusion.

Pour la différentiation abstraite comme pour l'intégration abstraite, ce qui est difficile, c'est de bien poser les définitions; c'est, comme disait HENRI POINCARÉ, de choisir un langage approprié. Ceci fait, on s'aperçoit qu'un certain nombre de théorèmes classiques fondamentaux se généralisent d'eux mêmes; et cela sans qu'il soit toujours nécessaire d'en compliquer la démonstration. On retrouve sans effort, la formule de la moyenne, la composition des dérivations, les formules donnant l'intégrale, la dérivée d'une somme, la dérivée d'une fonction composée, etc.... ([2]).

On peut d'ailleurs sur ces espaces abstraits vectoriels construire aussi une algèbre abstraite ([3]), effectuer des développements en séries ([4]), etc....

— Mesdames et Messieurs, dans cette revue au pas de course je n'ai pu que tenter de vous donner une idée de l'objet de l'Analyse générale. Je vous prierai de bien vouloir admettre que cette science ne se réduit pas à un ensemble de vues aux contours indécis, comme celles que je viens de développer. Malgré l'immensité du champ de validité des hypothèses que l'Analyse générale envisage, cette théorie est arrivée dès maintenant à un ensemble de résultats très précis. Elle est sans doute assez éloignée des applications à l'heure actuelle. Elle partage ce sort avec plusieurs des plus belles branches des mathématiques. Mais elle est destinée, sans nul doute, à se rapprocher de plus en plus des applications, ou tout au moins à servir de mieux en mieux à résoudre ou à éclairer les problèmes que nous pose la Nature. Comme l'a très justement remarqué M. VOLTERRA dans sa belle conférence, c'est la condition même du développement d'une théorie mathématique. Mais dès à présent, l'Analyse générale peut contribuer pour sa part à élucider la question palpitante des fondements de la Géométrie.

Enfin, il ne sera pas inutile de faire observer devant ce Congrès que l'Analyse générale et la Théorie des Ensembles abstraits offrent un bel exemple de coopération internationale. J'aurais voulu résumer les travaux qu'elles ont suscités dans diverses contrées. Je me contente de citer au hasard de la mémoire, les noms de quelques uns de ceux qui y ont contribué: MM. SCHOENFLIES et HAUSDORFF

---

([1]) *Sur la notion de différentielle dans le Calcul Fonctionnel.* (C. R. Congrès Soc. Sav., 1912, Paris).

([2]) *La notion de différentielle dans l'Analyse générale.* (Ann. Sc. Éc. Norm. Sup., 1925, t. 42, p. 293-323).

([3]) *Les polynomes abstraits.* (Journ. Math., 1929, t. 8, p. 71-92).

([4]) *Sur un développement des fonctions abstraites continues.* (Commemoration Vol. twentieth anniversary Calcutta Math. Soc., 1929).

en Allemagne, MM. HAHN et MENGER en Autriche, MM. E. H. MOORE et CHITTENDEN aux Etats-Unis, M. FRÉDERIC RIESZ et ses élèves en Hongrie, MM. SIERPINSKI et MAZURKIEVICZ en Pologne, MM. ALEXANDROFF et URYSOHN en Russie. Il y en aurait encore bien d'autres à citer, particulièrement parmi la très brillante pléïade des jeunes savants polonais et russes. Je m'excuse auprès d'eux; ce n'est que partie remise. Et si, en Italie, l'Analyse générale proprement dite n'a pas encore trouvé d'adeptes, n'oublions pas que cette science nouvelle est née de l'Analyse fonctionnelle, merveilleuse création du génie italien.

ROBERTO MARCOLONGO

# LEONARDO DA VINCI NELLA STORIA DELLA MATEMATICA E DELLA MECCANICA

L' opera scientifica di Leonardo è stata oggetto, da più di un secolo, di studi profondi, estesi e numerosissimi, sia da parte di specialisti che hanno esaminato i contributi arrecati da Leonardo alle varie scienze, sia da parte di eruditi che hanno fatto egregie, se non sempre equanimi, opere di sintesi: di guisa che la bibliografia vinciana (cui attende con zelo infaticabile da vari anni il dott. VERGA) è di una imponenza spettacolosa.

Tuttavia il campo è ben lungi dall' essere del tutto sfruttato. Occorre infatti ancora osservare che il Codice Atlantico offre sempre notevoli zone inesplorate e molte sorprese a chi sa ben cercarvi; che non tutti i manoscritti conosciuti sono pubblicati e quindi non ancora facilmente accessibili agli studiosi; che è appena finita la monumentale pubblicazione del Codice Arundel da parte della R. Commissione Vinciana; e iniziata quella dei tre codicetti del Museo Alberto e Vittoria di Londra, mentre è ancora di là da venire quella della imponente raccolta di disegni e di fogli di Windsor.

Ma si può far subito una constatazione. Pochissimi e rarissimi sono gli studiosi che hanno considerato, e il più delle volte solo per incidenza, Leonardo come matematico e preso in esame tutto il ricco materiale sparso nei manoscritti vinciani che riguarda la matematica pura, ed abbia investigato, con moderno spirito critico, il contributo arrecato a questa scienza, le conoscenze matematiche di Leonardo, ricercando le fonti di tali conoscenze, le relazioni coi matematici italiani della seconda metà del 400 e colle loro opere; per vedere in fondo quale posto occupi il grande artista scienziato nella storia della matematica. Ed è ben noto in quale alto concetto Leonardo ha tenuto le pure investigazioni scientifiche, poichè nel Trattato della pittura ha scritto: *Nessuna investigazione si può dimandare vera scienza, s'essa non passa per le matematiche dimostrazioni*; ed altrove: *non mi legga chi non è matematico nelli mia principia; nessuna certezza è dove non si può applicare una delle scienze matematiche over che non sono unite con esse matematiche.*

L' altissimo onore di collaborare, in seno alla R. Commissione Vinciana, alla pubblicazione nazionale dei manoscritti vinciani, il lungo lavoro per un' opera sintetica su tutta la meccanica di Leonardo, mi hanno condotto in pari tempo

ad occuparmi delle questioni innanzi accennate. Ed attribuisco a tale circostanza l'invito onorevolissimo del benemerito Comitato ordinatore del Congresso e di cui lo ringrazio profondamente, di esporre in forma molto sintetica, riducendo al minimo indispensabile le notizie biografiche e bibliografiche, i risultati di questi miei studi; i quali, confido, non riusciranno privi d'interesse e varranno a far ancor più rifulgere il genio multiforme del grande italiano.

## Relazioni di Leonardo coi matematici italiani. Suoi studi matematici. Le fonti.

I primi studi matematici di Leonardo si iniziano certamente a Firenze dove Egli, venutovi giovanetto col padre, ha vissuto fino al 30° anno di sua vita (1483), vi ha dipinto i primi celebri suoi quadri. Nella dotta e meravigliosa città medicea della seconda metà del 400, nella culla delle arti e dell'umanesimo, nella città del paradiso che, a detta di un contemporaneo, tra le sue meraviglie annoverava lo Studio, il greco e l'abbaco; fioriva da secoli una scuola di abachisti (aritmetica secondo Boezio o arte minore) che si ricollegava alle gloriose tradizioni di Fibonacci; la cui opera aritmetica, almeno nella sua parte elementare, costituiva il fondamento delle pubbliche lezioni. Lunghe e pazienti ricerche, cui hanno contribuito anche scienziati stranieri (e mi è grato ricordare tra questi il prof. KARPINSKI), ci hanno fatto conoscere la maggior parte dei rappresentanti di questa scuola, ai quali Leonardo pure accenna nei suoi scritti.

Egli nomina infatti *Pagolo astrologo*, una volta conosciuto per Paolo Dagomari, e che è invece *Paolo dell'abbaco dei Ficozzi*; *maestro Pagolo medico*, nel quale è forse da ravvisare PAOLO TOSCANELLI DAL POZZO, che Leonardo ha probabilmente conosciuto di persona; *Benedetto dell'abbaco*, autore di molte opere che si conservano manoscritte a Firenze; *Giovanni del Sodo*, di cui, malgrado diligenti ricerche, conosciamo solamente quel poco che ne dice il *Galigai* nella sua *Summa de aritmetica*. Ed è negli scritti di Leonardo che si ebbe forse la prima notizia sul matematico *Leonardo Chermonese*, ora abbastanza noto per le indagini del CURTZE e del FAVARO.

Le imperfette conoscenze di Leonardo, visibilissime nei primi tentennamenti, si vanno a mano a mano rafforzando durante il primo soggiorno milanese (1483-1499) e colle sue relazioni con FAZIO CARDANO, coi MARLIANI; e collo studio dell'ottica di VITOLONE (VITELLIO) e sopratutto per l'amicizia con FRATE LUCA PACIOLI. Leonardo nota l'acquisto (per 119 soldi) dell'*aritmetica di maestro Luca*; e venuto il PACIOLI a Milano nel 1496, ne diviene e resta compagno anche nei tempi della vita errante e, in qualche modo, ispiratore e collaboratore. È noto quale fonte di notizie per la vita e per gli studi di Leonardo siano le opere del PACIOLI; la sua collaborazione ai disegni della *Divina proportione*; lo stimolo dato alla

pubblicazione dell' EUCLIDE fatta appunto dal PACIOLI; e noti altresì gli accenni di Leonardo al detto Frate.

Nessun accenno invece in Leonardo del matematico PROSDOCIMO DE' BELDOMANDI; alla scuola bolognese in cui già ai primi del 1500 brillava SCIPIONE DEL FERRO; al CUSANO, i cui lavori geometrici hanno influito su alcune ricerche di Leonardo.

Sebbene Egli mostri in più punti interesse per l'arte maggiore e ricerchi l'*arcibra del Marliani*; quella di un ignoto *Alberto da Imola*, dove *insegna come numero e cosa s'egualia a cosa e numero*; e, come ha osservato il Beck, i problemi ch' Egli si propone sull'attrito dei corpi conducano a semplici equazioni di primo grado, le preferenze di Leonardo sono senza dubbio per gli studi geometrici.

I suoi manoscritti, specialmente alcuni di quei piccoli quadernetti tascabili, mostrano in modo lampante lo studio assiduo di EUCLIDE (il cui insegnamento era del resto uno dei capisaldi del quadrivio), ch' egli ha potuto fare sulle prime stampe italiane della fine del 400 e dei primi del 500; la ricerca costante dei codici di ARCHIMEDE (spessissimo citato e commentato); la conoscenza della Fisica di ARISTOTELE.

Le opere complete di ARCHIMEDE vennero alla luce per le stampe assai dopo la morte di Leonardo; e alcune informazioni su molti matematici greci, sulle varie soluzioni del problema delico, sulle coniche, sulla spirale, sulle pneumatiche di ERONE, più che dai codici (ad alcuni dei quali esplicitamente accenna in più parti) Leonardo deve averle attinte ad una fonte quasi insospettata: e cioè ad un libro di un famoso umanista, GIORGIO VALLA piacentino, cioè al *De expetendis et fugiendis rebus*, edito in una splendida aldina nel 1501; il primo volume del quale contiene una esposizione abbreviata dei primi cinque libri degli elementi di Euclide e poi un capitolo *de solidis figuris*, un altro sulle sezioni del cono e del cilindro e infine un esteso sunto del comento di EUTOCIO al secondo libro della sfera e del cilindro di ARCHIMEDE. Il VALLA possedeva un codice archimedeo, ora sperduto ma di cui si conoscono delle copie. È da tale enciclopedia, assai probabilmente, che Leonardo può aver appreso le ricerche degli antichi sul problema delle due medie proporzionali, di cui a lungo si occupa nel Cod. Atl. e nell' Arundel.

È da notare inoltre che nel libro IV, Cap. I°, dedicato alla *Fisica* di ARISTOTELE, il VALLA stampa per la prima volta una parte del commento di SIMPLICIO in cui si parla della prima delle lunule di IPPOCRATE.

Leonardo in uno dei suoi manoscritti, a testimoniare il suo interesse per gli studi geometrici, nota: *il Vespuccio mi vuol dare uno libro di geometria* (è il nipote del grande navigatore). Più esplicite sono le dichiarazioni dei contemporanei: p. e. quella di un messo della coltissima ISABELLA D'ESTE, il frate carmelitano FRA PIETRO DA NUVOLARA, (del marzo 1501, trovandosi Leonardo

a Firenze): *dà opra forte ad la geometria, impacientissimo al pennello; insomma li suoi esperimenti l'hanno distratto tanto dal dipingere che non può patire pennello*; e B. Castiglione, tredici anni più tardi in Roma, scriverà: *un altro dei primi pittori del mondo sprezza quell'arte dov'è rarissimo ed essi posto ad imparar filosofia; nella quale ha così strani concetti e nove chimere, che esso con tutta la sua pittura non sapria dipingerle.*

## Le ricerche geometriche di Leonardo.

Queste ricerche geometriche, profuse in quasi tutti i manoscritti, ma più specialmente nell'Atl. e nell'Arundel, rimaste, come tutte le altre investigazioni scientifiche, completamente ignorate dai contemporanei e dai successori; fatte in un tempo di profonda ignoranza geometrica e che avrebbero dovuto anzi costituire la prima favilla del rinascimento della geometria, non sono ancor oggi da trascurarsi; contengono non pochi risultati eleganti ed originali (ritrovati poscia in seguito); dànno, se pur è possibile, una idea della enciclopedica mente del Vinci.

Tralasciando, per amore di brevità, di esaminare le osservazioni a risultati noti, ai frequenti accenni al metodo infinitesimale; possiamo raggruppare le ricerche originali in questo modo:

a) *ricerche e costruzioni su trasformazioni di solidi.*

b) *ricerche sulle lunule, sui loro intrecci e su quadratura di figure piane con lati circolari.*

c) *ricerche sul problema dell'incidenza o problema di Alhazen.*

d) *ricerche sui centri di gravità di figure piane e solide.*

Di ognuno di questi argomenti daremo brevemente qualche cenno.

## Ricerche e costruzioni su trasformazioni di solidi.

Si tratta di trasformazioni di prismi, cilindri, coni, in solidi equivalenti: *sanza diminuzione o accrescimento di materia*, di cui si tratta diffusamente nei manoscritti e anche in un codice del Museo Alberto e Vittoria di Londra in cui è scritto: *principiato da me Leonardo da Vinci addì 12 di luglio 1505.*

È questo uno dei periodi più tristi della vita di Leonardo, quando, in seguito alla rovina della pittura della battaglia d'Anghiari, si era rifugiato a Fiesole, per consolarsi con gli studi geometrici e con quelli del volo strumentale. Non bisogna del resto dare decisiva importanza a queste date dei manoscritti per fissare le epoche degli studi vinciani; e queste ricerche, secondo il solito sistema di Leonardo, sono sparse un po' dappertutto: in prevalenza nell'Atl. e nell'Arundel.

Leonardo, come già si è detto, conosce il problema delle due medie proporzio-

nali (in particolare le soluzioni o riduzioni di ERONE, APOLLONIO, ecc.) e quindi quello della duplicazione del cubo, cui sono dedicati, e non sempre chiari e corretti, molti brani nei due anzidetti codici. Qualche volta anche vi aggiunge di suo qualche nome (come nel caso delle lunule attribuite a ZENOFONTE) non rispondente a personalità storicamente accertate; così qui parla di un PARMENIONE discepolo di APOLLONIO (!). Conosce quindi come risolvere graficamente la $x^3=a^2b$ (equivalente alla inserzione delle due medie proporzionali $x:y=a:x$; $y:x=b:y$). Un oscurissimo brano del Cod. Atl. accenna a due modi (per risolvere il problema della duplicazione) fatti *per fuggir lo stento del modo meccanico* e lasciano il sospetto che anche Leonardo, in un momento dei suoi studi, sia incorso nell'errore di poter risolvere elementarmente il problema delico.

Leonardo si propone il problema: *sia fatto d'un cubo un cilindro laterato di quattro lati eguali d'una data lunghezza*, cioè la costruzione grafica di $x$ tale che $l^3=x^2h$ e lo risolve con semplici costruzioni di geometria solida, anzichè ricorrere a costruzioni di terze e quarte proporzionali. Tale problema è evidentemente l'inverso di questo: *sia cubato il cilindro quadrilatero* ed a questi due è ridotta quella dell'altro problema: *sia fatto un cubo di due cubi vari di grandezza. Io piglierò il cubo minore* (dice Leonardo) *e l'allungherò all'altezza del cubo maggiore*, ecc. Coi nostri simboli, dato $u^3+v^3 (u<v)$ si fa, col primo problema, $u^3=vh^2$; allora è

$$u^3+v^3=v(h^2+v^2)=hm^2\,;$$

quindi col problema delle due medie proporzionali si trova $x$ tale che $x^3=hm^2$. E così per la differenza.

Ma questi ed altri problemi avevano già costituito oggetto di studio del CUSANO che ne tratta nel suo opuscolo: *De transformationibus geometricis* e la cui ultima parte riguarda appunto: *De transformatione corporum*; benchè tale opuscolo non figuri stampato prima del 1500, nè nella rarissima edizione del 1502 delle opere del Cusano, ma soltanto in quella del 1514, con comento e correzioni; Leonardo può averne certamente avuta notizia o dai codici o per mezzo del Pacioli.

Venendo più particolarmente ai problemi di trasformazione risolti da Leonardo e sorvolando su quella delle figure piane, in cui è pur notevole il metodo per la somma di più rettangoli in un rettangolo di data base (un piccolo saggio di calcolo grafico) diremo poche cose per quelli riguardanti i solidi, riferendoci specialmente al Codice Arundel per la facilità di riscontro con l'indice di esso, altro poderoso lavoro pubblicato dalla R. Comm. Vinciana.

Leonardo premette definizioni e chiarimenti: *Quel corpo quadrato che passa l'altezza del cubo si dice cilindro; quel ch'è manco in altezza del cubo è detto tavola. E così accade ne' tondi.* E che si tratti sempre di solidi affatto arbitrari, lo avverte dicendo: *e poichè queste proporzioni son sorde e inra-*

*zionali, però ho preso cura dimostrarle geometricamente in ogni difficil caso.* Ed ecco ora alcuni di questi problemi:

1. *D'un dato cilindro laterato se ne faccia un cubo: addimandasi l'altezza d'esso cubo.*

2. *Trasformare il cubo in un cilindro secondo una data grossezza: cercasi poi della sua lunghezza.*

3. *Sia mutata la quantità d'un cilindro in un altro cilindro più corto: si domanda quanto esso s'ingrossa.*

4. *D'un cilindro se ne faccia una tavola quadrata a una data bassezza: si domanda quanto esso cilindro s'allarga*; ecc. ecc.

In linguaggio moderno si tratta della soluzione grafica delle

$$x^3 = abc, \qquad x^3 = a^2b, \qquad cx^2 = a^2b$$

($a$, $b$, $c$, segmenti noti), il primo caso riducendosi subito al secondo.

Leonardo ne risolve alcuni e in quei casi in cui occorre il problema delle due medie proporzionali, disegna accanto o in margine la ben nota figura della soluzione di Apollonio o di Erone.

Per esem.: *D'una tavola quadrata se ne facci un cubo. Io ridurrò la tavola quadrata al suo natural cilindro* ($a^2b$) *colla quinta del primo: di poi colla prima del secondo* (si riferisce probabilmente ad uno dei tanti libri che vuol scrivere sugli elementi macchinali) *io farò di tal cilindro il suo cubo: e così in tal cubo è ridotto la intera della già detta tavola.*

*Del cubo si facci la tavola quadrata secondo una data latitudine. Di questo cubo* ($a^3$) *si farà l'estensione cilindrale secondo la data larghezza della tavola* ($x^2h$, sicchè $x^2h = a^3$) *e questo si farà colla seconda del secondo: di poi colla ottava del secondo s'astenderà la grossezza del cilindro nella data larghezza della tavola.*

*Del cubo dato si facci una tavola con lunghezza, larghezza e grossezza proporzionata secondo una proporzione inrazionale d'un'altra tavola data.*

*Metti,* dice Leonardo, *la data proporzione di lati in forma di tavola; poi per la 5ª del primo farai della tavola il suo cilindro; di poi per la prima del secondo farai del cilindro il suo cubo. Fatto questo tu ti trovi con due cubi di varia grandezza,* ecc.

Cioè in breve, dati $a$, $l$, $m$, $n$ si vuol trovare $l'$, $m'$, $n'$ in modo che

$$a^3 = l'm'n'$$

ed inoltre $l' : l = m' : m = n' : n$. Detto $x$ il rapporto comune risulta $a^3 = x^3lmn$ e se facciamo $u^3 = lmn$ risulta

$$a = ux$$

ossia: $l' : l = a : u$; ecc.

E gli esempi potrebbero continuarsi.

Queste ricerche assai interessanti, tenuto conto dei tempi, rivelano il gusto e l'accorgimento geometrico di Leonardo che, tra i primi degli studiosi del rinascimento, è tornato allo studio ed ai metodi dell'aurea geometria greca.

## Ricerche sulle lunule, sui loro intrecci e su quadratura di figure piane con lati circolari.

In quasi tutti i manoscritti, ma sopratutto nel Cod. Atl. si trovano estesissime ricerche di Leonardo comprese sotto il titolo *De ludo geometrico* e riguardano in parte le lunule quadrabili e loro artistiche combinazioni, in parte la quadratura di figure a lati circolari. Basti semplicemente accennare che nei due fogli dell'Atl. 167 Ra, Rb sono contenute, in quadratini assai piccoli, ben 70 figure chiare e nitide e disegnate a penna.

Leonardo spiega l'oggetto delle sue ricerche così: *De ludo geometrico, nel quale si dà il processo d'infinite varietà di quadrature di lati curvi,* aggiungendo che *il quadrato è il fine del travagliamento delle superficie geometriche* e che *quella superficie è sempre quadrabile in se medesima, alla quale si dà un quadrato uguale a lei.*

Nell'Atl., senza apporvi data, ci dice dell'inizio dei suoi lavori: *avendo io finito lì contro vari metodi di quadrare li circoli, cioè dare quadrati di capacità eguale alla capacità del circolo e date le regole di procedere in infinito, al presente comincio il libro de ludo geometrico e dò ancora modo di processi infiniti.* Ma ci fa conoscere il termine delle sue fatiche, perchè scrive nell'Atl.: *Finita addì 7 di luglio a ore 23 in Belvedere, nello studio fattomi dal Magnifico, 1514.*

Ei descrive ancora il suo metodo elementarissimo ed ingegnoso: *Se 2 cose eguali saranno in parte sopraposte l'una all'altra, ciò che di loro si tocca sarà eguale ed eguale fia il rimanente. La cosa che si muove lascia tanto di spatio quanto ella n'acquista.*

E più espressivamente ancora nell'Arundel dice: *Aiutati col prestare.* Ma, come ora si mostrerà, Leonardo adopera e sfrutta con gran successo, senza che lo dica espressamente, due altri fecondi procedimenti: quello della rotazione e della simmetria rispetto ad un asse.

Tali ricerche derivano in parte dalla prima delle lunule quadrabili di IPPOCRATE, la sola che Leonardo conoscesse dal testo del VALLA cui abbiamo accennato (le altre due, e dopo i lavori di CRAMER, VALLERIUS, CLAUSEN, non furono restituite ad IPPOCRATE che dopo la pubblicazione del testo critico completo di SIMPLICIO fatta dal DIELS nel 1882); e che Leonardo trascrive brevemente nell'Atl. 136 Ra, aggiungendo: *lunola* b *quadrabile per Zenofonte.* Forse Leonardo non aveva sott'occhio il testo del VALLA e citava a memoria, sbagliando il nome; per quanto esso figuri altre volte nei manoscritti vinciani. Nel testo

di Valla è pure riprodotta la considerazione di Ippocrate sulle lunule descritte sui tre lati di un mezzo esagono regolare inscritto in un semicerchio e Leonardo la riproduce per intero in un altro dei suoi manoscritti; precisamente in K, 62 r.

La prima lunula quadrabile di Ippocrate, com' è noto, è relativa al triangolo rettangolo isoscele. Nel secolo XVIII questo semplice caso divenne, per uno strano errore perpetuatosi anche in moderni testi di geometria, quello della somma delle due lunule costruite sui cateti di un triangolo rettangolo qualunque eguale all'area dello stesso triangolo, che non figura in Ippocrate e non riguarda la quadrabilità di ogni singola lunula. A chi si deve questa pur semplice generalizzazione? Intanto essa trovasi esposta e disegnata nel modo il più chiaro nell'Atl. 142 Ra, Rb, e con quella semplice dimostrazione che faremmo noi. Si deve quindi attribuire senz'altro a Leonardo? Ora la pubblicazione fatta nel 1899, dal dotto e compianto arabista H. Suter, dello scritto sulla quadratura del cerchio di Ibn Al Haitam (il famoso Alhazen) ha rivelato che il sapiente arabo conosceva questa generalizzazione. Leonardo ha forse appena conosciuta l'ottica di Alhazen ed è assai difficile ammettere che abbia potuto conoscere le altre opere geometriche; e pur essendo Leonardo capacissimo di aver pensato da sè a questa generalizzazione, è bene osservare che noi non conosciamo quasi mai le vie per cui ci vengono conservate, malgrado l'oblio di secoli, anche le minime scoperte.

Osserviamo che *lunola* è la parola adoperata dal Valla che poi nelle figure scrive, dal greco, *menisco*. Leonardo adopera pure le espressioni equivalenti di *bisangolo*; e per pezzi di lunule, quelle di *falcata* o *lunole falcate*.

Le combinazioni che Leonardo sa trarne, per evidenti scopi artistici e pratici, sono, come si è detto, numerosissime (intrecci, rosette a più foglie, ecc.): la fantasia dell'artista si è sbizzarrita in modo portentoso e quasi impossibile a seguirsi, malgrado il saggio del Beck e di altri, nella complessità e nel disordine dei fogli dell'Atl.

Si può tuttavia tentare di fare qualche raggruppamento in classi, qualche classificazione, cercando di derivare ciascuna classe da una figura elementare.

La tirannia del tempo non consentendomi l'esame approfondito di tutto, mi limiterò a esporre ben poche cose, illustrando le figure qui disegnate, in gran parte tratte dal Cod. Atl.

La prima e la seconda chiariscono il procedimento di Leonardo. Per es. nella prima (Atl. 134 Va) costruendo sui due lati eguali di un triangolo isoscele due archi di cerchio eguali, si vede subito, *aiutandosi col prestare*, che la figura *dipennata* è eguale al triangolo e quindi quadrabile. E così dicasi per la seconda. Poscia abbiamo:

a) *Figure derivate dalla prima lunula quadrabile di Ippocrate.* La fig. 3 (Atl. 172 Va) si riferisce alla prima lunula di Ippocrate; e Leonardo nota del pari che i due segmenti circolari sottesi dai cateti sono eguali al segmento

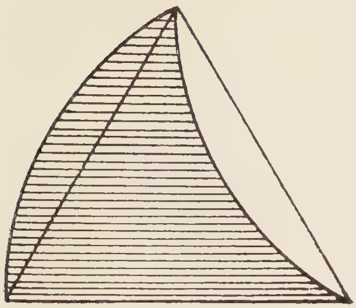


Fig. 1.

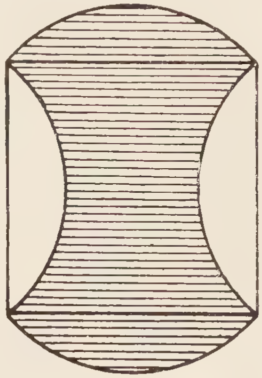


Fig. 2.

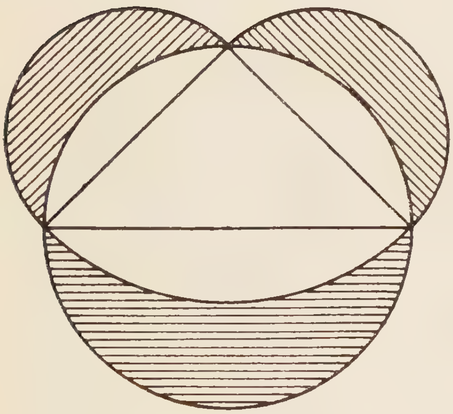


Fig. 3.

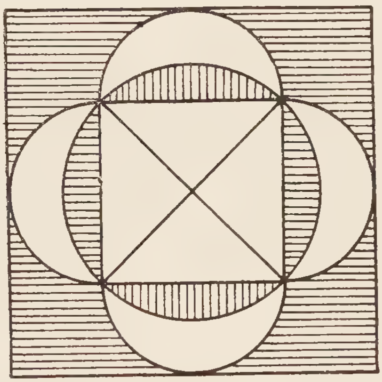


Fig. 4.

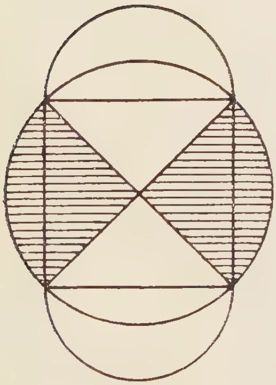


Fig. 5.

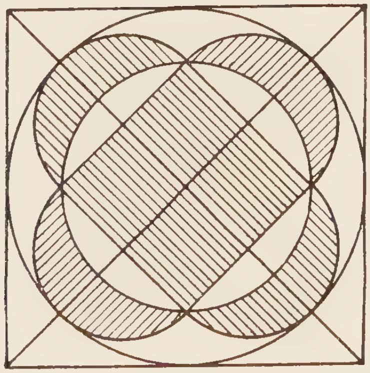


Fig. 6.

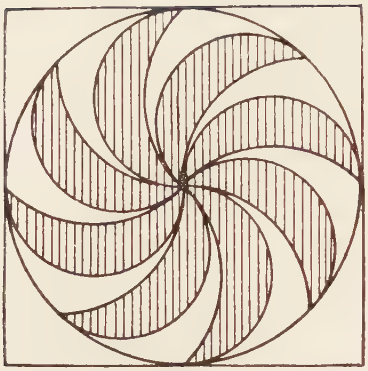


Fig. 7.

contenuto tra l'ipotenusa e il cerchio tangente ai cateti nei loro estremi (Atl. 44 Ra, 96 Va). Ne deduce subito l'elegante applicazione della fig. 4 (Atl. 98 Va; I, 139 v); in cui si scorge agevolmente che, secondo la stessa dicitura di Leonardo, *la parte dipennata è quadrabile e vale quel che non è dipennato* (cioè entrambe valgono la metà del quadrato grande); mentre nella fig. 5 (manoscritto G, 55 v) ciò che non è dipennato eguaglia il quadrato inscritto nel cerchio; e nella fig. 6, affine alla fig. 4 (Atl. 83 Va), il dipennato eguaglia il doppio del quadrato interno che ha lato metà del circoscritto e quindi area eguale alla sua quarta parte; onde anche il non dipennato è quadrabile.

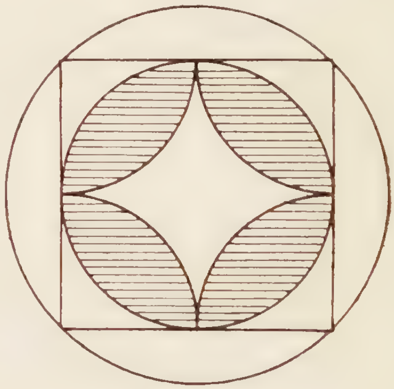


Fig. 8.

I lati circolari che costituiscono la lunula d'Ippocrate si incontrano a 45° (bisangoli di 45°). Se si fa ruotare la lunula di un angolo di 45° otto volte di seguito intorno ad un suo vertice si ottiene una rosetta a otto foglie: fig. 7 (Atl. 152 Va); la parte dipennata è quadrabile.

E così si possono coordinare a questo gruppo molte altre figure disegnate e chiaramente illustrate da Leonardo.

b) *Figure da derivate bisangoli di 90° con lati quadranti di uno stesso cerchio.* Si osservi la fig. 8 (Atl. 44 Va). Un facile ragionamento mostra che la parte non dipennata (composta di una corona circolare e di una stella a quattro punte) è equivalente al quadrato inscritto; lo stesso può dirsi subito per la fig. 9, essendo nelle due figure eguali le parti dipennate, ma diversamente disposte. Abbiamo qui uno dei tanti esempi di rosette a quattro foglie.

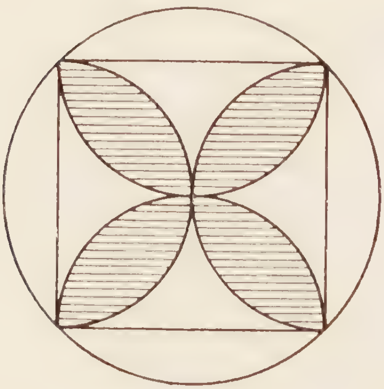


Fig. 9.

Valgono le stesse cose per le due figure complementari, fig. 10 e 11 (Atl.83 Va, 172 Va). Leonardo dice: *in questa prima e seconda parte val tanto il dipennato quanto quello che non è dipennato e per questo seguita*

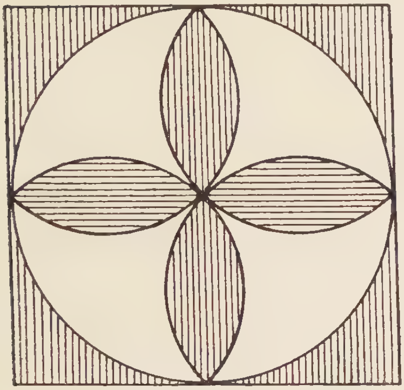


Fig. 10.

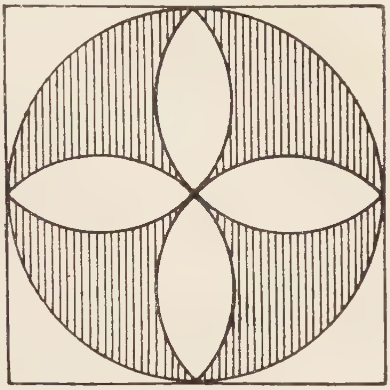


Fig. 11.

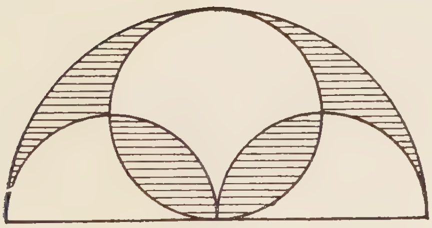


Fig. 12.

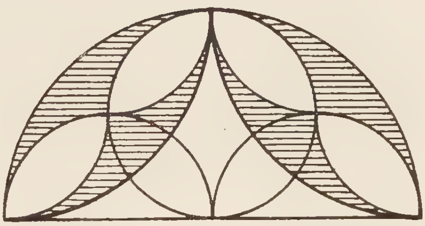


Fig. 13.

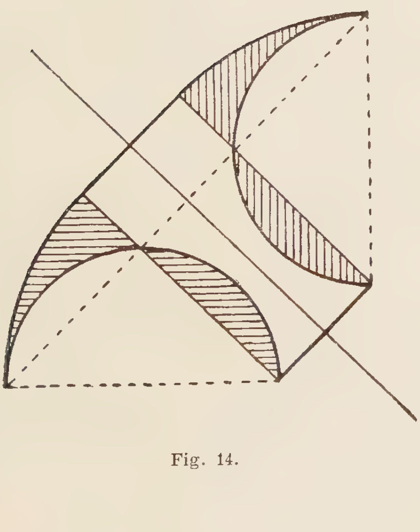


Fig. 14.

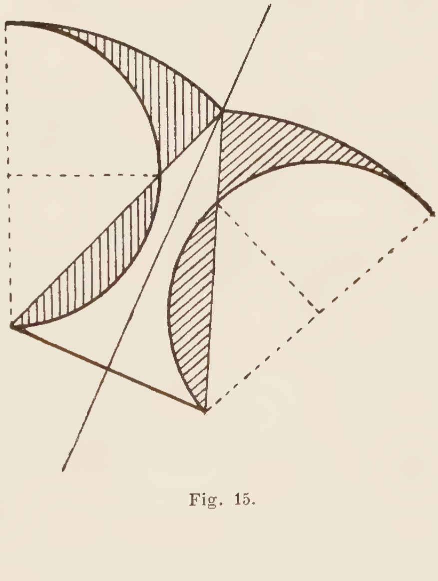


Fig. 15.

*che, essendo queste due figure quadrate, la metà di una di loro è quadrata e vale il dipennato e anche vale quel che non è dipennato.*

E così di seguito fino a ottenere figure con 26 bisangoli.

c) *Lunule falcate.* Compariscono di preferenza in quei disegni che possono assai bene indicarsi col nome di scompartimenti semicircolari. Nella fig. 12, Atl. 167 Ra, b, risulta chiaramente una *falcata* con due lati circolari, quadranti di uno stesso cerchio ad angolo retto fra loro e con un raggio che la chiude. Essa è quadrabile essendo equivalente all' ortogonio isoscele in essa inscritto e quindi al quadrato costruito sul raggio. Completando la figura, come dal disegno, risulta quadrabile tutta la parte non dipennata. Analoghe considerazioni per la fig. 13, Atl. 167 Ra, b. Leonardo va anche più avanti formando, sempre in un semicerchio, altre falcate quadrilatere quadrabili; per brevità non sono disegnate. Da queste, col principio di simmetria, si ricavano altre figure del massimo interesse.

d) *Equivalenza tra falcate e segmenti circolari. Principio di simmetria.* Si esamini la fig. 14, Atl. 83 Ra; si tratta sempre di un triangolo rettangolo isoscele inscritto in un semicerchio; centro in uno degli estremi del diametro e con raggio eguale al diametro si descrive un arco di cerchio fino ad incontrare il raggio uscente da quell' estremo. Il settore circolare è equivalente al semicerchio; togliendo la parte comune, risultano equivalenti le due parti dipennate, ossia una falcata equivalente al segmento circolare; ma le due parti non sono evidentemente quadrabili. Orbene, se tracciamo una retta parallela al lato del segmento circolare e facciamo poscia una simmetria intorno a questa retta si otterrà che tutta la figura dipennata è equivalente al rettangolo tracciato in figura e quindi è quadrabile. Facciasi invece la simmetria intorno ad un asse passante per uno dei vertici della falcata, come nella figura 15, Atl. 83 Ra, e risulta una figura a forma di ancora; e la parte dipennata è equivalente al triangolo isoscele disegnato in figura e quindi quadrabile.

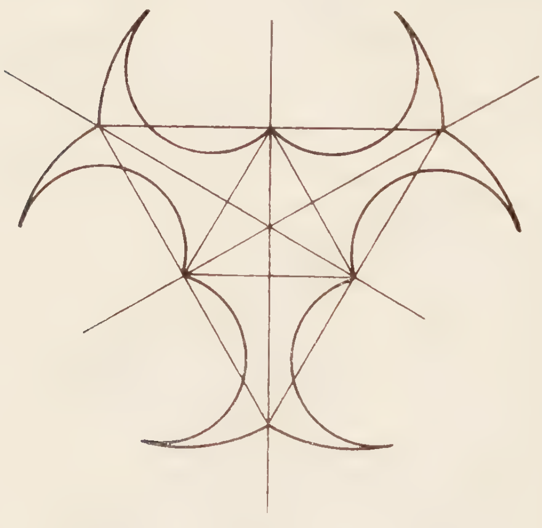


Fig. 16.

Si facciano tre di queste ancore sui lati di un triangolo equilatero, fig. 16; oppure quattro sui lati di un quadrato e così di seguito e si otterranno eleganti figure a lati circolari e tutte quadrabili.

Ma bastano, credo, questi pochi esempi a dare una idea dell'interesse e della eleganza di queste ricerche fondate su metodo tanto elementare e dove forse i più potenti metodi generali sarebbero più che altro d'imbarazzo.

## Il problema di Alhazen.

È il problema famoso del bigliardo circolare o della riflessione su di uno specchio sferico. Per fissare le idee, siano, p. e. all'esterno di uno specchio sferico, un punto luminoso e l'occhio; si chiede quale è il cammino di un raggio luminoso che partendo dal lume, dopo una riflessione sulla superficie sferica, giunge all'occhio, ossia in quale direzione si vedrà nello specchio l'immagine di un oggetto.

Per la prima delle leggi sulla riflessione, il problema si riduce a trovare, sul cerchio massimo della sfera contenente punto luminoso ed occhio, un punto tale che i raggi incidente e riflesso facciano angoli eguali colla tangente al cerchio in quel punto (d'onde il nome di problema dell'angolo dell'*incidentia*, secondo l'espressione vinciana). È una naturalissima e spontanea generalizzazione del problema degli specchi piani dell'ottica di Euclide ben nota a Leonardo. E non vi è nulla di strano ch'esso si sia presentato alla mente di chi aveva fatto tanti e così profondi studi sulla teoria della visione; e che, una volta propostosi il problema, abbia tentato in tutti i modi, purtroppo sempre invano, di risolverlo.

Ma già ai tempi di Leonardo non solamente il problema non era nuovo, ma era già e sia pure barbaricamente, secondo l'espressione di BARROW, risoluto per merito di uno dei più dotti e profondi astronomi arabi, IBN AL HAITAM (965-1039) più comunemente conosciuto agli occidentali col nome di ALHAZEN, autore di numerose opere astronomiche, la cui ottica fu famosa in tutto il medio evo ma non fu stampata che nel 1572, mentre le sue notevoli opere geometriche furono fatte conoscere recentemente colle pubblicazioni di WIEDEMANN, HEIBERG, SUTER.

È appunto nel 5° libro dell'ottica che trovasi risoluto e discusso in modo complicato, ed oltre ogni dire prolisso, il problema dell'*incidentia*. Ora di tale ottica esisteva già una traduzione italiana del secolo XIV e inoltre l'opera sull'ottica di VITELLIO (matematico polacco del secolo XIII), in molte parti non è che un compendio di quella di ALHAZEN. Tale opera fu ben nota a Leonardo che la cita in più punti; faceva parte della famosa biblioteca medicea di S. Marco dove l'aveva studiata il PACIOLI (e lo afferma nella prefazione della *Summa*) e anche Leonardo, scrivendo nell'Arundel: *Vitolone in sancto Marco.*

Anche per questa via può quindi Leonardo aver avuto notizia del *problema dell'angolo dell'incidentia.* Può peraltro affermarsi che non ha avuto la costanza di seguire i lunghi intricati sviluppi di Alhazen, ancor oggi non facili a seguirsi; come del pari può dirsi che, sia nell'Atl., sia maggiormente nell'Arun., ha fatto numerosissimi e sempre vani tentativi per risolvere il problema. Escludendo il caso ovvio in cui lume ed occhio sono egualmente distanti dal centro dello

specchio, a volte Leonardo afferma l'impossibilità del problema, a volte pare cerchi una costruzione approssimata e più spesso infine erra completamente.

E ciò non deve affatto meravigliare; chè il problema di 4° grado di troppo eccedeva le conoscenze e le risorse geometriche di Leonardo e bisogna arrivare

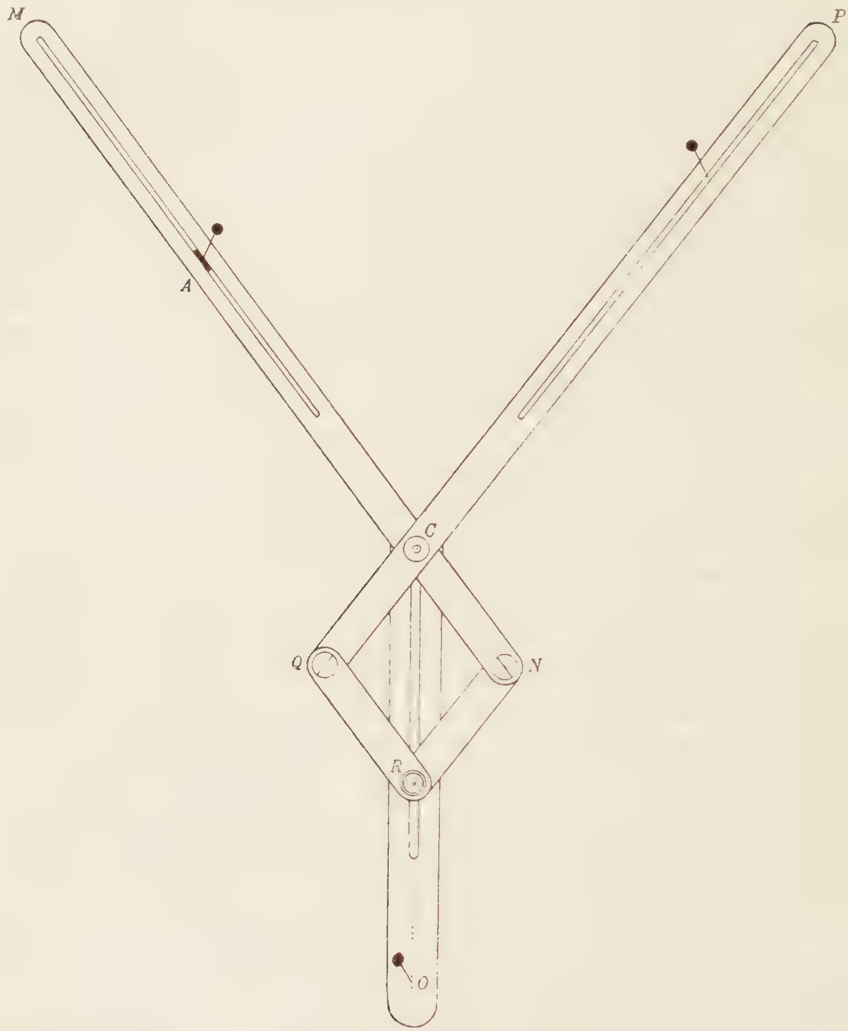



Fig. 17.

ad HUYGENS, nel 1672, per avere la prima semplice ed elegante soluzione mediante la intersezione del cerchio (specchio) con una iperbole equilatera passante per gl'inversi del lume e dell'occhio rispetto al cerchio e facilmente costruibile.

Vista l'inanità dei suoi sforzi ripetuti, Leonardo pensò di ricorrere ad una

soluzione *per via d'istrumento*, cioè alla soluzione pratica mediante un semplice ed ingegnoso sistema articolato che trovasi descritto, ed accompagnato da disegni, invero non chiarissimi, nell'Atl. 187 Ra.

Ho fatto costruire, seguendo le indicazioni di Leonardo, tale istrumento che ho il piacere di presentare ai miei illustri e gentili uditori.

Due aste scanalate (fig. 17) $MN$, $PQ$ possono ruotare intorno ad un pernio $C$ collegato ad una terza asta $CO$, in cui sono praticati dei fori, e si collegano ad altre due aste $QR$, $RN$ in modo da formare un rombo $CQRN$ deformabile, il cui vertice $R$ può a sua volta scorrere su $CO$. Si fa in modo che $CO$ corrisponda alla lunghezza del raggio del cerchio fissando $O$ in uno dei fori mediante uno spillo (una *agucchia*, dice Leonardo) sul foglio del disegno; quindi si fa passare la scanalatura di $MC$ per il punto $A$ in cui suppone il lume; e si fissa con un piccolo tassello che aderisce alla scanalatura e con un nuovo spillo, proprio nel punto del lume. Fatto ciò si costringe l'asta $PQ$ a passare pel punto $B$ in cui si suppone l'occhio; basterà spostare convenientemente $C$ sul cerchio di centro $O$, mentre l'asta $MN$ si muoverà girando intorno al punto $A$, e il punto $R$ scorrerà lungo $CO$ deformando il rombo; ma siccome le aste $MN$, $PQ$ formeranno sempre angoli eguali con il raggio $CO$, quando le avremo fatte passare per $A$ e per $B$, nelle posizioni che esse vengono ad occupare avremo la posizione del raggio incidente e riflesso $AC$ e $BC$.

È questo, se non ci inganniamo, uno dei primi esempi di costruzioni di sistemi articolati, a cinque aste, per la risoluzione di problemi di geometria.

Sia a tal proposito ricordato che Leonardo, che ha pensato ad ogni artificio meccanico, è forse il primo inventore di un compasso di proporzione o *seste proporzionali* e se ne hanno disegni e descrizioni in numerosi passi dell'Atl., nei codicetti del Museo Alberto e Vittoria di Londra; ecc.

In un caratteristico disegno dell'Atl., ripetuto nell'Ar., e che sventuratamente non reca parole esplicative, prima il Beck, poi il Feldhaus, così benemeriti della storia della tecnica, hanno ravvisato un modello di un *compasso parabolico*. E sarebbe ancora oppurtuno accennare al famoso *tornio ovale*; ma la disamina di tutti questi interessanti argomenti mi costringerebbe ad abusar troppo della pazienza dei miei uditori.

## Le ricerche geometriche sui centri di gravità.

Leonardo segue gli scolastici e sopratutto Alberto di Sassonia per quanto riguarda i concetti generali, le definizioni e prime proprietà dei centri di gravità dei solidi e delle figure piane riguardate come lastre sottili (da Leonardo generalmente dette piramidali).

Il suo contributo più notevole e più noto è quello di aver scoperto (o forse ritrovato) il baricentro di un tetraedro, e di una piramide laterata. Con evi-

dente riferimento ad un tetraedro nel manoscritto F, 51 r dice (senza alcuna spiegazione):

*Il centro d'ogni gravità piramidale è nel quarto del suo assis di verso la basa e se dividerai l'assis per 4 eguali e intersegherai li assis di tal piramide tale intersegatione verrà nel predetto quarto.*

*Assis* di una piramide è per Leonardo la retta che unisce il vertice col baricentro della base.

Notizie ben più numerose e preziose si trovano (come ho già avuto occasione di far rilevare altrove) nell'Arundel e nei *Fogli mancanti al Codice di Leonardo da Vinci sul volo degli uccelli,* ritrovati in epoca recente e pubblicati dalla R. Comm. Vinciana, a cura del benemerito e dotto M. E. Carusi.

Già alla fine di 65 r di Arundel Leonardo dice (sempre con riferimento al tetraedro): *li assis inferiori delle piramidi laterate* (*di qualunque corpo piramidale*) *i quali nascieranno nel terzo dell'assis delle lor base, si intersegheranno nel quarto della lor lunghezza di verso la basa.* Nel foglio successivo (o precedente) non si tratta affatto di baricentri. Non ho bisogno di dire che noi non sappiamo nulla del modo con cui furono raccolti e ordinati i fogli che ora costituiscono l'imponente Codice Arundel. Tuttavia dalle figure disegnate da Leonardo lì e in altri punti si può già arguire che egli dimostra il teorema come faremmo ora noi valendoci dei primi elementi di Euclide. Infatti in Arund. 218 v in poche parole e col sussidio di tre figure si palesa in modo perspicuo la dimostrazione di Leonardo.

*Vedi qui nella figura prima andando inverso mano stanca esser quello di sopra si promette, e nella figura di mezo si dimostra come le linee* af *e* de (sono due degli assis) *nascon ne' loro angoli e terminano nel terzo dell'alteza dell'assis delle lor facce; e nella terza figura si vede come tirate le linie dal terzo dell'altezza dell'assis de' lati predetti e terminati nelli angoli oppositi, esse linee s'intersegheranno nel quarto della lor lunghezza come si dimostra nelle linee* pt *e* nr *intersegarsi nel punto* s.

Non si ha quindi alcun dubbio; Leonardo ha scoperto e dimostrato l'elegante teorema sugli assis di un tetraedro, col suo modo grafico ed espressivo, così come facciamo noi.

Ma nei vari manoscritti a noi pervenuti non si trova un cenno chiaro del modo con cui egli ha scoperto che il punto d'intersezione degli assis è il baricentro del tetraedro; un vago cenno potrebbe forse riscontrarsi in Arun. 123 v (fine pagina), foglio importante per una ragione che diremo, e in 218 v, linee 11-28, passaggio invero assai oscuro e non del tutto corretto, in cui si parla di *vertici egualmente pesanti,* e dove peraltro è notato il seguente teorema generale:

*Di ogni piramide tonda, triangula o quadrata o di quanti lati si sia,*

*il centro della sua gravità è nella quarta parte della sua assis vicina alla basa.*

LIBRI ha detto che, per questa ricerca, Leonardo decomponeva la piramide in tanti straterelli con piani paralleli alla base come si fa dai moderni. Invero però, se si stà alla lettera di ciò che risulta dai numerosi disegni di Leonardo, niente autorizza la supposizione di LIBRI, che perciò è fatto segno a una buona frecciata da parte del DUHEM.

Ma esaminiamo un po' meglio ed obbiettivamente la cosa e sulla scorta di nuovi elementi ora a noi noti. Leonardo conosce certamente il libro di ARCHIMEDE sull'equilibrio dei piani, che egli cita, (*De centro gravitatis*) dove nelle prop. XI e XII del primo libro si dimostra rigorosamente e in due modi diversi e sempre col metodo di riduzione all'assurdo che il centro di gravità di ogni triangolo si trova sulla mediana; d'onde segue (prop. XIV) il noto teorema sul centro di gravità del triangolo; nella prop. XV (con cui termina il libro) si determina quello di un trapezio colla nota ed elegante regola.

Nella meccanica di ERONE, libro ritrovato e reso noto ai nostri giorni, si trova nuovamente esposta la teoria dei c. di g. di figure piane. Pel triangolo ERONE afferma senz'altro e senza alcun riferimento alla dimostrazione archimedea, che il baricentro si trova sulla mediana, che divide il triangolo in due parti di egual peso. Ora ciò, e nell'opera di un ingegnere quale ERONE, non può essere correttamente interpretato che in questo modo: la mediana è un asse di simmetria gravifica in quanto divide per metà tutte le rette o strisce parallele alla base. Notevole poi il fatto osservato da ERONE che il baricentro di un triangolo coincide con quello di tre pesi eguali posti nei vertici.

Leonardo che ha certamente conosciuto le pneumatiche di ERONE (forse per mezzo del già citato libro del VALLA) ha potuto conoscere qualche cosa delle Meccaniche?

Molto probabilmente no. Ingegnere portentoso, osservatore profondo, non ignaro di considerazioni infinitesimali (e ne addurrò or ora altra prova) è plausibilissimo ammettere che anche lui abbia notata la proprietà di simmetria gravifica della mediana (la quale suppone la divisione in striscie parallele alla base) ed abbia subito trasportato questa considerazione al caso del tetraedro, notando che il piano passante per uno spigolo e per uno degli assis è un piano di simmetria gravifica (ciò che suppone appunto la divisione in strati paralleli alla base); d'onde risulta subito il teorema sul baricentro.

E allo stato delle nostre conoscenze dei manoscritti vinciani non è possibile dir di più. L'osservazione poi che il baricentro coincide con quello di quattro pesi uguali posti nei quattro vertici (a cui forse è da riferire la frase di *vertici egualmente pesanti* che abbiamo già citata) è del tutto ovvia e, sebbene essa non sia esplicitamente enunciata, conduce Leonardo all'elegante teorema sulle

congiungenti i punti medi dei lati opposti di un tetraedro che s'incontrano nel baricentro ed ivi si bisecano, che viene enunciato al foglio 123 v dell'Ar.:

*La piramide di basa triangolare ha 'l centro della sua gravità naturale nel taglio che s'astende dal mezo della basa al mezo del lato opposto a essa basa, fatto equalmente distante alla congiunzione della basa col predetto lato.*

Qui Leonardo con « basa » intende evidentemente il lato, visibile all'osservatore, della base su cui poggia il tetraedro.

Nè vanno trascurati altri contributi: ad esempio il calcolo elegante ed esattissimo per la ricerca del baricentro di una mensola (trapezio isoscele), indipendentemente dal teorema di ARCHIMEDE e da me fatto altrove conoscere con gli opportuni complementi; e tutta la serie di considerazioni, che celano il metodo infinitesimale, per la ricerca grafica del baricentro di un settore circolare, di un semicerchio (Arun. 215 r) mediante la divisione in otto settori, assimilati ad altrettanti triangoli; ed infine il caratteristico passo dei fogli mancanti al codice sul volo degli uccelli 2 v:

*E se tu volessi (essere) più vicino alla verità del vero centro della gravità del semicircolo, dividilo in tante piramidi che la concavità della lor basa rimanga quasi insensibile e quasi paia linea retta e poi tieni il modo qui di sopra figurato e avrai quasi la verità del predetto centro.*

Cioè Leonardo divide il semicerchio in tanti piccoli settori eguali che riguarda come tanti triangoli di cui conosce il baricentro e dopo ciò non deve far altro che comporre più forze parallele eguali; e ciò egli sa far benissimo.

Ma egli tenta ancora un procedimento per assegnare la distanza di detto centro dal diametro che limita il semicerchio. Il raggio essendo eguale ad uno, tale distanza, secondo la regola data da Leonardo tradotta in numeri e prendendo, come Egli fa sempre, $\pi=22/7$, è 0,36338; mentre coll'applicazione del teorema di PAPPO è 0,424.

Queste ricerche, anche all'infuori di altri e ben più capitali contributi su cui non mi è dato ora intrattenermi, assicurano già un posto onorevole a Leonardo nella storia della meccanica.

Non si può e non si deve, per valutare l'opera scientifica di un uomo, prescindere dall'ambiente in cui è vissuto, dallo stato della cultura, della scienza dei suoi tempi. Quanto è stato esposto in forma succinta, e che troverà più ampio e ragionato sviluppo in altra occasione; l'importanza e la eleganza dei risultati conseguiti dal sommo artista scienziato quando era già più che cinquantenne, agli albori del secolo XVI in cui appena si inizia in Italia, collo studio dei classici della geometria, il rinascimento della geometria e delle scienze, assicurano, io credo, un posto duraturo a Leonardo nella storia della matematica e della

meccanica; dànno un' altra prova luminosa della vastità della universalità e genialità della sua mente.

E forse alcuno dirà che di una nuova conferma non si sentiva il bisogno; ed avrà ragione; ma averlo ricordato ancora una volta in una occasione così solenne, in presenza di ospiti così illustri e degli scienziati di tutto il mondo; nel momento in cui l'eterna giovinezza d'Italia si rinnovella di novelle fronde, non è stato, io credo, nè inutile, nè inopportuno.

---

La conferenza fu ampiamente illustrata da grandi disegni e si chiuse con una serie di proiezioni sulle principali invenzioni meccaniche di Leonardo.

NICOLAS LUSIN

# SUR LES VOIES DE LA THÉORIE DES ENSEMBLES

Ces voies ont été considérablement discutées en ces dernières années, grâce au grand débat élevé entre les idéalistes et les réalistes sur le principe du tiers exclu et à l'apparition d'une théorie de M. D. HILBERT appellée par l'illustre auteur « théorie des démonstrations mathématiques ». En raison des renseignements fort incomplets concernant cette théorie, je me bornerai à indiquer brièvement les conclusions personnelles auxquelles je suis arrivé à ce sujet, sans entrer dans la discussion de tous les arguments émis.

Pour ne pas nous égarer en discussions métaphysiques sur le sens du mot *infini*, je me contente de discuter ici un point particulier qui attire sans doute l'attention de tous les mathématiciens : c'est un essai de résoudre d'une manière satisfaisante ce qu'on appelle le *problème du continu*, posé, il y a dejà une soixantaine d'années, par GEORG CANTOR.

Il y a, dans la théorie des fonctions, beaucoup de correspondances effectives entre des ensembles fort différents. Par exemple, si nous considérons la proposition : *l'ensemble de toutes les fonctions continues* f(x) *a la puissance du continu*, toute personne ayant la culture mathématique comprend qu'il s'agit d'une correspondance univoque et réciproque entre l'ensemble de toutes les fonctions continues $f(x)$ et l'ensemble de tous les nombres réels $[0 \leq t \leq 1]$, de manière qu'à tout nombre réel $t$ corresponde une fonction continue $f(x)$ et *vice versa*, cette correspondance étant établie pour *tous* le nombre réels $t$ *indépendamment de ce qu'on peut ou non concevoir un nombre réel particulier* $t_0$.

La question est maintenant de savoir s'il existe ou bien si l'on peut nommer une correspondance analogue entre l'ensemble des nombres réels $[0 \leq t \leq 1]$ et la totalité de *tous* les nombres transfinis de seconde classe $0, 1, 2, \ldots, \omega, \ldots, \alpha, \ldots \mid \Omega$, cette dernière totalité étant supposée légitime.

Voici la marche des idées de M. D. HILBERT indiquée couramment.

Chaque pas de l'activité humaine dans l'Analyse mathématique peut être *formalisé*, c'est-à-dire être représenté par un assemblage de symboles simples en nombre fini. Parmi ces derniers on trouve les symboles de la logistique :

| & | , | $V$ | , | $\rightarrow$ | , | $-$ | , | $(x)$ | , | $(Ex)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| et | | ou | | implique | | non | | quelque soit | | il existe |

| $\varepsilon(A)$ | , | $Z(a)$ | , | $N(a)$ |
|---|---|---|---|---|
| choix arbitraire de la logistique | | « $a$ est un entier positif » | | « $a$ est un nombre de seconde classe » |

et les symboles mathématiques:

| $=$ | , | $a'$ |
|---|---|---|
| égal à | | nombre suivant |

Il existe donc un domaine primaire $D$ sur lequel on projette nos pensées mathématiques, et la projection sur $D$ de la démonstration d'un théorème $T$ de l'Analyse mathématique est une « figure » formée de symboles simples répétés de manière qu'à chaque pas du raisonnement corresponde une partie de cette figure, formée conformément aux régles fixes imposées aux symboles simples.

Après ces généralités, passons au problème du continu. Il s'agit donc d'un numérotage des points irrationnels du segment [0, 1] au moyen des nombres transfinis de seconde classe, ou bien, ce qui revient au même, d'un numérotage analogue des fonctions numériques $f(n)$ à valeur entière positive et d'un argument entier positif, puisque, si $x$ est un nombre irrationnel, nous avons

$$x = \cfrac{1}{f(1) + \cfrac{1}{f(2) + \cdots}}$$

Voici maintenant ce que fait l'illustre auteur, si j'ai bien compris son idée. Il examine le mode de génération de chaque fonction numérique particulière $f(n)$ et il fait correspondre à $f$ sa définition dans le domaine $D$. Si la fonction numérique considérée $f(n)$ est *inductive*, c'est-à-dire définissable à partir de $n$ au moyen des substitutions algébriques et des récurrences *simultanées superposées*, on peut transformer, dans le domaine $D$, sa définition de manière qu'elle ne contienne que des récurrences *successives en nombre fini*. Or, si nous changeons formellement, dans cette définition, l'écriture du signe $Z'$ en $N$, la définition de $f$ devient une définition d'un nombre transfini déterminé de seconde classe. En omettant les difficultés techniques, on arrive ainsi à obtenir la correspondance univoque et réciproque, dans la domaine $D$, entre les *définitions* des fonctions numériques inductives et celles des nombres transfinis de seconde classe. Et on procède de la même manière, — toujours si j'ai bien compris — dans le cas d'une fonction numérique $f(n)$ non inductive, c'est-à-dire telle que sa définition dans le domaine $D$ contient une ou plusieurs fois le signe $\varepsilon$ du choix arbitraire de la logistique. Et M. D. HILBERT écrit même la correspondance ainsi obtenue des définitions sous la forme d'une fonction

$$\varsigma(a, n)$$

de manière qu'on obtient toutes les fonctions numériques $f(n)$ en faisant parcourir à la lettre $a$ *tous* les nombres transfinis de seconde classe.

Cette solutions sera-t-elle adoptée unanimement par tous les mathématiciens, les idéalistes, et les réalistes ? Bien que je sois très loin de l'idéalisme au sens de M. ZERMELO, je ne le crois pas : les idéalistes la trouveront vraiement « trop psychologique ».

C'est M. J. HADAMARD qui a écrit, il y a dejà vingt trois années, dans les célébres *Cinq lettres sur la théorie des ensembles*, les mots suivants : « Je n'aimerais pas beaucoup placer la question à la façon de M. HILBERT sur le terrain du *non contradictoire*, qui me paraît encore relever de la psychologie et faire entrer en ligne de compte les propriétés de nos cerveaux ».

Le sens de ces mots devient actuellement tout clair : le domaine primaire $D$ de M. D. HILBERT n'est qu'un cerveau mathématique vivant, mais vraiment trop idéalisé. Le cerveau réel, à un nombre limité de cellules, est un champ de procédés physiques et chimiques toujours en nombre fini même s'il était indéfiniment renouvellé : à ce point de vue les mathématiciens ne considéreront jamais individuellement qu'un nombre borné d'éléments d'une nature quelconque. Or le domaine primaire $D$ de M. D. HILBERT a des propriétés un peu différentes et, en somme, presque paradoxales : *d'une part*, il peut renfermer un terme arbitraire de la suite

$$0, 0', 0'', 0''',...., 0''^{....\prime},....$$

(ce qui n'est autre chose que la suite d'entiers positifs) et il est en même temps un champ du procédé de la récurrence *intuitive* ; *d'autre part* on ne peut nullement pratiquer, dans ce domaine $D$, les procédés de la récurrence *mathématique* ordinaire.

C'est la différence essentielle entre la récurrence intuitive et la récurrence mathématique qui est le point le plus délicat de toute cette théorie, et sur ce point je m'accorderais le plus volontiers avec M. H. WEYL, puisque beaucoup de mathématiciens, HENRI POINCARÉ inclus, ne font aucune différence entre ces deux espèces de récurrence. Il paraît incontestable que les mathématiciens de notre époque sont près de perdre le sentiment de la différence profonde entre ce qui est évident intuitivement et ce qui devient évident après un raisonnement simple.

Or, si l'on ne fait pas cette différence, on se trouve immédiatement conduit à un numérotage, dans le domaine $D$, de toutes les définitions des nombres réels ainsi que de celles des nombres transfinis au moyen des entiers positifs et, par conséquent, on tombe de cette manière dans les difficultés du raisonnement de M. RICHARD. Chaque figure, dans le domaine $D$, qui sert à définir un nombre réel peut être décrite au moyen des phrases d'une langue déterminée. Or, si nous considérons les caractères de cette langue comme les chiffres d'un système numérique, chaque définition devient simplement un entier positif écrit dans ce systéme numerique.

Ainsi, les idéalistes, il me semble, trouveront un peu dangereuse cette proximité du raisonnement de M. RICHARD et la méthode de M. D. HILBERT de remonter

toujours aux définitions primaires. D'ailleurs, chaque nombre transfini de seconde classe a une infinité non dénombrable de définitions mathématiques : ceci tient à ce que chaque nombre limite de seconde classe peut être représenté de bien de manières comme une limite d'une suite ascendante

$$a_1 < a_2 < a_3 < \dots$$

de nombres transfinis. Il paraît que la méthode de M. D. HILBERT s'appuie sur la possibilité de nommer une *seule* suite de cette espèce et c'est précisement ce fait qu'il est difficile à adopter aux idéalistes ainsi qu'aux réalistes. C'est M. EMILE BOREL qui a indiqué que le *paradoxe du transfini* consiste précisément dans l'impossibilité du choix d'une telle suite unique.

La nature de la méthode de M. D. HILBERT différe essentiellement de celle des méthodes classiques de la théorie des fonctions qui établissent des correspondances les plus utiles (comme, par exemple, la correspondance citée entre les nombres réels et les fonctions continues). Et la nécessité s'impose alors de distinguer, parmi les problèmes de la théorie des fonctions, ceux dans lesquels on peut éviter la méthode de remonter aux définitions primaires. Par exemple, M. W. SIERPINSKI et moi avons démontré que la continu $[0 \leq x \leq 1]$ peut être décomposé de bien de manières en une infinité d'ensembles mesurables $B$ numérotés au moyen des nombres transfinis de seconde classe. Mais nous avons constaté, dans la plupart des cas, que les classes de ces ensembles mesurables $B$ ne sont pas bornées, c'est-à-dire tendent vers $\Omega$. Est-ce que la méthode des definitions primaires est nécessaire pour établir l'existence d'un cas où les classes sont bornées ? C'est évidemment le problème affaibli du continu, puisqu'on trouve la solution complète du problème du continu de Cantor si chaque ensemble $B$, dans la décomposition indiquée du continu, se réduit à un seul point.

Dans le système de M. D. HILBERT la contradiction formelle, c'est-a-dire le choc des mots, est exclu : nous ne rencontrerons jamais la phrase : *un n'est pas égal à un* $(1 \neq 1)$. Mais la question se pose de savoir quelle réalité se cache derrière les mots.

Et cependant la théorie de M. D. HILBERT est le plus grand événement dans les mathématiques : nous avons le moyen d'analyser les démonstrations mathématiques. Par exemple, si j'ai bien compris, bien que l'axiome de M. ZERMELO soit non contradictoire, comme l'a démontré M. D. HILBERT, on peut se passer de lui dans chaque raisonnement aboutissant aux choses finies, de la même manière que, dans l'Algèbre, on peut exclure la lettre qui nous empêche.

Le point de vue opposé à l'idéalisme est celui du réalisme. Il me semble qu'on se trouve conduit à cet ordre d'idées plutôt par l'accumulation des problèmes insolubles que par les paradoxes de la théorie des ensembles.

D'ailleurs, c'est la fatigue du « paradis de CANTOR » qui a joué un certain rôle : une quantité énorme de notions nouvelles sans applications et toujours sans

contact avec les autres branches des mathématiques classiques, les nombreux travaux aux sujets manifestemment artificiels et du moins hors de proportion avec leur utilité — tout cela exigeait une prudence extrême.

Le point de vue du réalisme était mis en plein jour dans le débat sur l'axiome de M. ZERMELO paru dans les célèbres *Cinq lettres sur la théorie des ensembles.* Le développement ultérieur de ce point de vue est bien connu : ce sont les doutes de M. W. BROUWER relativement au tiers exclu qui expriment le plus clairement ce point de vue. D'ailleurs, il y a déjà, toujours dans ces *Cinq lettres*, des lignes qu'on doit considérer comme l'origine de l'attaque sur le principe du tiers exclu: ce sont les mots de M. HENRI LEBESGUE qui restaient pendant longtemps un peu énigmatiques : « bien que je doute fort qu'on nomme jamais un ensemble qui ne soit ni fini, ni infini, l'impossibilité d'un tel ensemble ne me paraît pas démontrée ». Mais c'est au célèbre savant de Hollande que nous devons les critiques scientifiques de ce Principe.

Le succès de la théorie de M. W. BROUWER a sa vraie cause non pas dans la hardiesse du célèbre savant (bien que dans ces choses il faut être infiniment hardi), mais dans l'artifice déjà cité des considérations basées sur l'infini actuel.

Je ne considère les théories de M. W. BROUWER ni comme une sorte d'interdiction, ni comme un essai d'avoir une logique nouvelle: même pour nous, les mathématiciens, habitués à la multiplicité des géométries, avoir une multiplicité de logiques serait vraiement un luxe fort triste. Il me semble que la construction d'une logique nouvelle est à présent fort prématurée.

Il me paraît que les idées de M. W. BROUWER auront pour conséquence l'emploi plus prudent de la récurrence mathématique.

La théorie non inductive des entiers positifs n'est pas encore faite et dans cette direction nous n'avons que des résultats très dispersés. Ici il faut faire un grand travail comme celui que M. W. SIERPINSKI a fait dans le domaine des Ensembles en classant les propositions qu'on peut démontrer sans l'Axiome de M. ZERMELO et celles que nous ne savons pas démontrer de cette manière.

La résistence énigmatique qu'éprouvent les savants en cherchant à établir la liaison entre les constantes numériques, par exemple entre $\pi$ et $e$, les difficultés de la théorie des ensembles projectifs de points — tout cela nous amène à croire qu'il y a probablement plus de postulats qu'on ne le croit d'ordinaire dans les mathématiques classiques. (M. R. WAWRE).

A travers les siècles, le grand débat élevé entre d'ALEMBERT et EULER sur la notion de *fonction arbitraire* devient actuellement le débat sur le *nombre réel arbitraire* et même sur l'*entier positif arbitraire.*

Th. v. KÁRMÁN

# MATHEMATISCHE PROBLEME DER MODERNEN AERODYNAMIK

Gleichzeitig mit der Entwicklung der praktischen Flugtechnik in den letzten 25 Jahren hat die Dynamik der Flüssigkeiten eine Wandlung erfahren, die man wohl als Wiedergeburt dieses Zweiges der mathematischen Physik bezeichnen kann. Am Ende des letzten Jahrhunderts schien die Hydrodynamik an einen Ruhepunkt gelangt zu sein. Die Dynamik der idealen Flüssigkeiten wurde mit Hilfe der mathematischen Mitteln der Potentialtheorie weit ausgebaut; es hatte aber den Anschein, als wenn sie nur in vereinzelten Fällen geeignet wäre, die wirklichen Vorgänge zu beschreiben; andererseits bot die exakte Theorie der mit Trägheit und Reibung behafteten Flüssigkeiten derartige mathematischen Schwierigkeiten, dass man allgemein glaubte, die Lösung der Aufgaben über Luftwiderstand, Oberflächenreibung usw. der Empirie überlassen zu müssen. Der Grenzfall, wo die Reibung einen ausschliesslichen Einfluss ausübt, sodass die Trägheitskräfte gegen die Reibungskräfte vernachlässigt werden können, ist zwar mathematisch wieder einfach, hat indessen für die Aerodynamik kein Interesse. So hat auch die im Anfang besonders in Frankreich entwickelte Fluglehre nur ihre Grundbegriffe aus der Dynamik der Flüssigkeiten entnommen, sonst aber ihre Berechnungen auf empirisch gewonnene Gesetze gegründet.

Den Fortschritt der letzten drei Jahrzehnte kann man kurz in folgenden Punkten zusammenfassen:

*a*) Es hat sich gezeigt, dass die Theorie der idealen Flüssigkeiten — insbesondere unter geschickter Benutzung der Wirbelsätze — weitaus mehr als nur die Grundbegriffe für die Theorie des Fluges zu bieten vermag. Sie liefert heute vielmehr eine Reihe quantitativ richtiger Berechnungsmethoden der Fluglehre.

*b*) Man ist auf dem Wege, die Theorie der reibenden Flüssigkeiten so auszubauen, dass man eine grosse Gruppe der Vorgänge, auf welche die Reibung keinen ausschliesslichen, aber einen massgebenden Einfluss ausübt, erfassen kann.

In diesem Kreise, in welchem alle Zweige der Mathematik vertreten sind, kann mein Vortrag einerseits nur eine Aufzählung der Beispiele bieten, in welchen bekannte Methoden der mathematischen Hydrodynamik praktische Anwendung gefunden haben, andererseits die Probleme bezeichnen, die noch mathematische

Schwierigkeiten bieten. Ich könnte meinen Vortrag als ein Verzeichnis gelöster und ungelöster Aufgaben der mathematischen Aerodynamik bezeichnen.

1. - *Ideale Flüssigkeiten. Exakte Lösungen der Potentialgleichung.*

Ein charakteristisches Beispiel für die Art, wie heute die Flugtechnik die Theorie der idealen Flüssigkeiten verwendet, liefert der Fall des Luftschiffes, des Luftfahrzeuges « leichter als die Luft ». Man hat früher das sogenannte d'Alembertsche Paradoxon — nach welchem ein in einer idealen Flüssigkeit geradlinig und gleichmässig fortbewegter Körper keinen Widerstand erfährt — als Beispiel für die Unbrauchbarkeit der mathematischen Hydrodynamik angeführt. Der Vergleich zwischen der gemessenen und z. B. nach der Methode der Quellen und Senken gerechneten Druckverteilung an einem wirklichen Luftschiffkörper zeigt indessen, dass die Vorgänge an dem Luftschiffkörper — mit Ausnahme der hinteren Spitze — von den theoretisch gerechneten keineswegs sehr verschieden sind. Den Widerstand, der gerade durch die sogenannte Ablösung an der Hinterspitze bedingt ist, kann man natürlich nicht ausrechnen, doch liefert die Theorie richtige Ergebnisse für die Druckverteilung und mit gewissen Beschränkungen auch für die Kräfte und Momente, die bei der allgemeinen Bewegung des Luftschiffes auftreten. Bekanntlich hat KIRCHHOFF die allgemeine Bewegung eines starren Körpers in einer unendlich ausgedehnten Flüssigkeit in der Weise behandelt, dass er die Energie des Gesamtsystems Körper + Flüssigkeit in der Gestalt einer quadratischen Form der Geschwindigkeitsgrössen ansetzte. Die Koeffizienten dieser quadratischen Form sind die Komponenten der sogenannten scheinbaren Trägheit des Körpers und man kann durch sie die Impulskomponenten und die auf den Körper wirkenden Kräfte und Momente einfach ausdrücken. Die Rechnung lässt sich z. B. für ein langes Ellipsoid ohne Schwierigkeit durchführen und hat für die Momente, die bei Kurvenfahrt eines Luftschiffes auftreten und für seine Festigkeit massgebend sind, wertvolle Aufschlüsse geliefert. Für die in der Technik üblichen Luftschifformen kann man die entsprechende Rechnung mittels Annäherungsmethoden durchführen, die ebenfalls befriedigende Ergebnisse liefern. Hierbei fand die aus der Potentialtheorie bekannte Methode der Quellen und Senken vielfache Anwendungen. Durch Anordnung von Quellen und Senken gleicher Gesamtintensität längs einer geraden Strecke und Ueberlagerung der entsprechenden Strömung über eine gleichförmige Parallelströmung kann man — nach einer RANKINE zugeschriebenen Methode — die Umströmung von Rotationskörpern verschiedener Gestalt bei achsialer Anströmung darstellen. Durch Anordnung von Doppelquellen längs der Rotationsachse kann man — wie ich unlängst zeigen konnte — auch die Strömung und die Druckverteilung für den Fall erhalten, dass die Anströmungsrichtung mit der Achse des Rotationskörpers einen von Null verschiedenen Winkel einschliesst.

2. - *Zweidimensionale Tragflügeltheorie. Anwendungen der konformen Abbildung.*

Die für die Fluglehre wichtigste Anwendung der Dynamik idealer Flüssigkeiten ist indessen die Theorie des Tragflügels. Der folgende Satz — zuerst vielleicht von Lord Kelvin ausgesprochen — war längst bekannt. Es bewege sich ein unendlich langer Zylinder quer zu seiner Achse mit der Geschwindigkeit $U$ gleichmässig und geradlinig in einer reibungslosen Flüssigkeit von der Dichte $\varrho$, wobei die Strömung um den bewegten Körper eine Zirkulation vom Betrage $\Gamma$ besitzt; alsdann entsteht eine zur Geschwindigkeit senkrechte Kraft $P$ pro Längeneinheit der Zylinderachse vom Betrage $P=\varrho\Gamma U$. Es lag nahe, diese Querkraft mit dem auf einen Tragflügel wirkenden Auftrieb zu identifizieren und die Berechnung des letzteren ist damit — wenigstens für Tragflügel mit unendlicher Spannweite — auf die Aufgabe reduziert, die Zirkulation zu ermitteln, die offenbar durch die Geschwindigkeit, durch die Form des Flügelschnittes und von seiner Einstellung zur Bewegungsrichtung bedingt ist. Die Lösung dieser Aufgabe wurde durch JOUKOWSKI und KUTTA mit Hilfe der Forderung geleistet, dass die Zirkulation so bestimmt werden soll, dass an der spitzen Hinterkante des Tragflügels keine Umströmung, sondern ein Abfluss mit endlicher Geschwindigkeit erfolgt. Durch diese Annahme war der Weg zur ergiebigen Anwendung der Methoden der konformen Abbildung geöffnet und man hat richtige und mit der Erfahrung gut im Einklang stehenden Gesetze für die Grösse des Auftriebes, des auf den Flügel wirkenden Momentes, für die Druckverteilung usw. gewonnen; Gesetze, die indessen zunächst nur auf Tragflügel mit unendlicher Spannweite sich beziehen.

Die exakte Methode der konformen Abbildung bewährt sich insbesonders als inverses Verfahren; man kann damit eine grosse Klasse von Tragflügelschnitte herleiten, für welche man Auftrieb und Druckverteilung zu bestimmen vermag. Für die Behandlung gegebener Flügelschnitte ist die Methode schwerfälliger. Man kann indessen wenigstens für dünne Tragflügelprofile ein Annäherungsverfahren ausarbeiten, welches den direkten Weg ermöglicht: Auftrieb, Moment und Druckverteilung für eine vorgegebene Profilform zu bestimmen. Man ersetzt zunächst den dünnen Flügelschnitt durch eine Doppellinie, durch einen « Schlitz », und versucht diesen auf den Kreis abzubilden. Falls der Schlitz von einer Geraden wenig verschieden ist, so kann man hierfür explizite Formeln herleiten, die dann eine erste Annäherung für die entsprechende Strömung liefern. Analysiert man diese Strömung, so sieht man, dass sie hergeleitet werden kann aus einer Wirbelbelegung, die längs einer geraden Strecke verteilt ist, z. B. längs der Geraden, die Vorder - und Hinterkante des Flügelschnittes verbindet. Man erhält somit eine angenäherte Theorie des Flügels mit unendlicher Spannweite, die den körperlich ausgedehnten Flügelschnitt durch eine Wirbelfläche ersetzt. Es ist dies ein Zwischenschritt zwischen der einfachsten, groben Annäherung, die den Tragflügel durch eine einzige Wirbellinie, durch die sogenannte

« tragende Linie » ersetzt und zwischen der exakten Theorie, die die Strömung um den Flügelschnitt genau zu ermitteln trachtet. Diese Schritte der Annäherung – « tragende Linie » und « tragende Fläche » — sind insbesonders deshalb von Wichtigkeit, weil sie einen verhältnismässig einfachen Ausbau der Tragflügeltheorie für endliche Spannweite ermöglichen, deren exakte Durchführung ausserordentliche Schwierigkeiten bieten würde.

3. - *Theorie des Tragflügels mit endlicher Spannweite. Anwendungen der Wirbeltheorie.*

Wenn man nämlich zum Tragflügel mit endlicher Spannweite übergehen will, entstehen gewisse Schwierigkeiten. Wir betrachten geschlossene Wege um die Flügelschnitte; nach unserer Annahme liefern sie für das Längenintegral der Geschwindigkeit von Null verschiedene Werte; dieser Wert kann nach den Wirbelsätzen auch dann nicht verschwinden, wenn wir über das Tragflügelende hinausgegangen sind, es sei denn, dass man inzwischen Wirbellinien geschnitten hat. Es müssen also Wirbellinien vom Tragflügel in die Flüssigkeit treten; wie man dies qualitativ zu denken hat, hat zuerst LANCHESTER gezeigt. Die roheste Annäherung ist die folgende: den Tragflügel selbst kann man als eine Wirbellinie mit konstanter Zirkulation denken; an jedem Flügelende denken wir Wirbellinien von derselben Intensität ausgehen, die parallel zur Strömung nach hinten laufen. LANCHESTER hat auch erkannt, dass durch den Umstand, dass bei Fortbewegung des Tragflügels immer neue Stücke dieser « Hufeisenwirbelstränge » erzeugt werden müssen, die Fortbewegung mit einem Energieaufwand, d. h. mit einem Widerstand verbunden werden muss; das Theorem vom Widerstand Null gilt daher in diesem Falle auch für die reibungslose Flüssigkeit nicht mehr. Wenn man indessen diesen Widerstand mit Hilfe der obigen rohen Annäherung berechnen will, so erhält man bei endlicher Spannweite einen unendlich grossen Wert, während man für die unendliche Tragfläche den Wert Null bekommt.

Dieser Schwierigkeit kann man dadurch abhelfen, dass man die beiden an den Flügelenden abgehenden Wirbelstränge durch ein System von stetig verteilten Wirbellinien ersetzt, die sich längs der ganzen Breite des Tragflügels ansetzen und in der Hauptströmungsrichtung verlaufen. Jhre Intensität ist durch die Aenderung der Zirkulation längs des Tragflügels gegeben; sie ist – pro Längeneinheit gerechnet – gleich dem Differentialquotienten der Zirkulation längs der tragenden Linie. Durch diese Vorstellung ist die Möglichkeit gegeben, Auftrieb und Energieaufwand durch Betrachtung des Strömungszustandes in unendlicher Entfernung hinter dem Tragflügel zu berechnen, Diese Rechnung wurde von PRANDTL und seinen Schülern für Einzelflügel und Flügelkombinationen durchgeführt. Ich will nur die Ausdrücke für den einfachsten Fall des Eindeckers anschreiben. Die Grundidee ist die, dass die Bewegung in einer senkrechten Ebene in grosser Entfernung hinter dem Tragflügel als eine Potentialbewegung betrachtet werden

kann, die an der Schnittlinie der Wirbelfläche unstetig ist. Bezeichnen wir das entsprechende Geschwindigkeitspotential mit $\varphi(y, z)$, die Fluggeschwindigkeit mit $U$, so ist der Auftrieb durch

$$A = \varrho U \iint \frac{\partial \varphi}{\partial z}(y, z)\, dy\, dz \tag{1}$$

der Energieaufwand in der Zeiteinheit durch

$$E = \varrho \frac{U}{2} \iint \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2\right] dy\, dz \tag{2}$$

gegeben. Es entsteht die hübsche und einfache isoperimetrische Aufgabe $E$ bei gegebenem $A$ zum Minimum zu machen. Bekanntlich lassen sich die beiden in Gl. (1) und (2) vorkommenden Flächenintegrale in Linienintegrale umwandeln und zwar erhält man

$$A = U \oint \varphi\, ds \tag{3}$$

$$E = \frac{1}{2} U \oint \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n}\, ds \tag{4}$$

wobei die Linienintegrale um den Schlitz zu erstrecken sind, den der Schnitt der Wirbelfläche durch die $yz$ Ebene liefert. Es sei $\varphi + \delta\varphi$ das variierte Potential; berücksichtigt man, dass $\oint \left(\varphi \frac{\partial \delta\varphi}{\partial n} - \frac{\partial \varphi}{\partial n}\delta\varphi\right) ds = 0$ ist, so erhält man leicht

$$\delta A = U \oint \delta\varphi\, ds \tag{5}$$

$$\delta E = U \oint \frac{\partial \varphi}{\partial n}\, \delta\varphi\, ds \tag{6}$$

woraus für die Lösung $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \text{const.}$ folgt. Der Tragflügel geringsten Energieaufwandes muss eine Verteilung der Zirkulation aufweisen, die einen konstanten Abwind längs der tragenden Linie erzeugt. Das Potential $\varphi(y, z)$ ist identisch mit demjenigen, das wir erhalten, wenn wir eine unendlich lange starre ebene Platte von der Breite des Tragflügels senkrecht zu ihrer Breite in Bewegung setzen.

Der minimale Energieaufwand ergibt sich zu

$$E = \frac{A^2}{\varrho \frac{U^2}{2} \pi b^2} \tag{7}$$

d. h. der zur Erzeugung des Auftriebs erforderliche Energieaufwand bzw. bei der Auftriebserzeugung unvermeidliche sog. « induzierte » Widerstand ist mit dem Quadrat des Auftriebes proportional. Nun war es eine wohl bekannte experimentelle Tatsache, dass der Widerstand eines Flügels angenähert durch $W = \alpha + \beta A^2$ dargestellt werden kann; der durch das zweite Glied gegebene Anteil des Widerstandes wurde durch die obige Berechnung theoretisch erklärt und der Rechnung zugänglich gemacht. Auch wurde durch die Prandtl-schen Vorstellung des Wirbelsystems der Weg geöffnet, die gegenseitige Beeinflussung der Tragflügel bei

Mehrdeckern zu berechnen, die Theorie der Luftschrauben bis zu einem befriedigenden Zustand zu entwickeln. In einem grossen Komplex technisch wichtiger Aufgaben wurde die Empirie durch Anwendung angenäherter Ergebnisse der rationellen Hydromechanik ersetzt.

4. - *Die Annahmen der Prandtlschen Theorie. Wege zur Weiterentwicklung.*

Welche Annahmen bzv. Annäherungen sind in den Prandtl-schen Ansätzen enthalten, wenn wir die Sache vom mathematischen Standpunkte aus betrachten? Zunächst haben wir den Tragflügel durch eine « tragende Linie » ersetzt, d. h. wir haben angenommen, dass die Querabmessungen gegen die Spannweite klein sind, insbesonders das Verhältnis $\frac{t}{b}$ (Flügeltiefe zur Spannweite) gegen Eins sehr klein ist. Ferner haben wir die Wirbellinien mit der Fortbewegungsrichtung des Tragflügels, d. h. mit der Richtung der Geschwindigkeit $U$ zusammenfallen lassen. Dies ist mit den Wirbelsätzen in Einklang, falls alle Zusatzgeschwindigkeiten, die durch die Fortbewegung des Tragflügels entstehen gegen $U$ vernachlässigbar klein sind, es ist aber falsch, wenn wir diese Geschwindigkeiten berücksichtigen, da der Wirbel in einer idealen Flüssigkeit an der Materie haftet, daher Wirbelflächen und Stromlinienflächen zusammenfallen müssen. Die zweite Annahme der Prandtl- schen Theorie besteht also darin, dass man die Grössen $\frac{u}{U}, \frac{v}{U}, \frac{w}{U}$ ($u$, $v$, $w$ Zusatzgeschwindigkeiten) oder was dieselbe Bedeutung hat, die Grösse $\frac{\Gamma}{Ut}$ sehr klein betrachtet. Für eine Gruppe von praktischen Aufgaben hat die erste Annäherung mit $\frac{t}{b} << 1$ und $\frac{\Gamma}{Ut} << 1$ brauchbare Ergebnisse geliefert. Doch zeigen sich bald Fälle, wo eine weitere Annäherung notwendig ist.

So versagt die Annahme der tragenden Linie (d. h. die Annahme, dass $\frac{b}{t}$ unendlich klein ist), sobald diese zur Fortbewegungsrichtung nicht senkrecht steht, da man dann, ebenso wie es beim Hufeisenwirbel der Fall war, unendlichen Energieaufwand erhält. Man muss daher in diesem Falle, da der Schritt zum körperlich ausgedehnten Tragflügel fast unüberwindliche Schwierigkeiten bietet, den entsprechenden Zwischenschritt vornehmen, den wir bei der Theorie des Tragflügels mit unendlicher Spannweite erwähnten, und eine tragende Fläche d. h. eine Unstetigkeitsfläche vom Umriss des Tragflügels in der $z=0$ Ebene annehmen. Die mathematische Aufgabe besteht dann in der Bestimmung der Wirbelkomponenten $\gamma_x$ und $\gamma_y$, für die nach den Helmholtzschen Satzen die Beziehung $\frac{\partial \gamma_x}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_y}{\partial y} = 0$ gilt. Sie können daher aus einer Wirbelfunktion $G$ durch den Ansatz $\gamma_x = \frac{\partial z}{\partial y}$, $\gamma_y = -\frac{\partial z}{\partial x}$ abgeleitet werden. An der Vorderkante und an beiden Seitenkanten der Tragfläche gilt offenbar $G=$konst., während an der Hinterkante $\frac{\partial z}{\partial n} = 0$ gilt. Die Funktion $G(y, z)$ ist durch die Wölbung und durch

den Anstellwinkel des Tragflügels bestimmt. Falls die durch das Wirbelsystem erzeugten Zusatzgeschwindigkeiten wieder mit $u$, $v$, $w$ und der Neigungswinkel eines Tragflächenelementes gegen die Fortbewegungsgeschwindigkeit des Tragflügels $U$ mit $a$ bezeichnet werden, so verlangt die konsequente Durchführung der Theorie unter Beibehaltung der Annahme, dass $\frac{U}{u}$, $\frac{U}{v}$, $\frac{U}{w}$ als klein gegen 1 betrachtet werden

$$\operatorname{tg} a \backsimeq a = \frac{w}{U}.$$

Diese Bedingung bestimmt — indem man $w$ durch $G$ ausdrückt — die Funktion $G$ und somit den ganzen Strömungszustand.

Die Lösung dieser Aufgabe ist bisher nur durch vereinzelte, annähernden Ansätze in Angriff genommen worden.

Wenn man die Annahme, dass $\frac{\Gamma}{Ut}$ sehr klein gegen Eins ist, fallen lässt, so wird die Theorie der tragenden Linie äusserst kompliziert. Man hat dreidimensionale unstetige Flüssigkeitsbewegungen zu finden, bei denen die Unstetigkeitsfläche Stromlinienfläche ist. Man kann indessen eine nächste Annäherung rechnen, wenn man auf Grössen bis zur Ordnung von $\left(\frac{\Gamma}{Ut}\right)^3$ sich beschränkt und höhere Potenzen von $\frac{\Gamma}{Ut}$ vernachlässigt. Mit dieser Einschränkung lässt sich die Aufgabe auf eine zweidimensionale zurückführen, indem die zur $x$ Achse senkrechten Schnitte der Wirbelfläche sich so rechnen lassen, als wenn ein aus unendlich langen parallelen Wirbelfäden bestehendes System seine Konfiguration zeitlich ändern würde. Die Lösung dieser Aufgabe lässt sich qualitativ übersehen und führt zu dem Ergebnis, dass die Wirbelfläche sich in zwei Wirbelstränge aufrollt; eine quantitative Lösung ist indessen noch nicht erzielt worden.

Anch bei der Anwendung der Tragflügeltheorie auf den Fall der Luftschrauben begegnet man ähnlichen Schwierigkeiten. Wie wir für den Fall der geradlinig bewegten tragenden Linie angenommen haben, dass die Wirbelschicht durch eine Ebene angenähert wird, kann man für den Fall des Schraubenflügels, d. h. der sich drehenden und gleichzeitig fortschreitenden tragenden Linie, annehmen, dass die bei dieser Bewegung erzeugte Wirbelschicht eine aus zylindrischen Schraubenlinien bestehende Schraubenfläche bildet. Nimmt man ausserdem gleichförmige Geschwindigkeitsverteilung im Schraubenkreis. d. h. eine sehr grosse Anzahl von Flügeln an, so gelangt man zu äusserst einfachen und anschaulichen Ergebnissen. die zuerst von BETZ angegeben und von mehreren Autoren zu einem Entwurfsverfahren für Schrauben ausgearbeitet worden sind. Man hat indessen dabei etwas vernachlässigt, was augenscheinlich Einfluss auf die Ergebnisse haben muss: die Kontraktion des Schraubenstrahles. Im Propellerstrahl hinter der Schraube ist die Achsialgeschwindigkeit vermehrt, infolge der Kontinuität können daher die Stromflächen nicht aus zylindrischen Schraubenlinien zusammengesetzt sein. Eine konsequente Durchführung der Annäherung mit Hilfe einer systematischen Entwicklung nach den als klein anzusehenden Grössen fehlt bisher.

5. - *Theorie der Wirbelstrasse. Formwiderstand.*

Ich betonte bereits, dass die Prandtlsche Theorie des induzierten Widerstandes einen Fall darstellt, in welchem wir zu einem Widerstand bei gleichförmiger Bewegung des Tragflügels gelangen, ohne die Annahme idealer Flüssigkeiten zu verlassen. Zweifellos wird auch in diesem Falle die bei der Bewegung zur Ueberwindung des Widerstands zu leistende Arbeit letzten Endes durch die innere Reibung der Flüssigkeit bzw. der Luft verzehrt. Dass wir trotzdem zu richtiger Berechnung des Energieaufwandes gelangen, beruht darauf dass dieser erst dazu verwendet wird, Wirbel zu erzeugen und so die kinetische Energie der Flüssigkeit zu vermehren; erst durch diese Zwischenstufe wird die Arbeit allmählich in Reibungswärme überführt. Ein anderes Beispiel, den Widerstand gleichmässig bewegter Körper rein mit Hilfsmitteln der Theorie idealer Flüssigkeiten zu erfassen, bietet die von mir einige Jahre vor der Tragflügeltheorie entwickelte Theorie der *Wirbelstrassen*.

Es handelt sich dabei um den Fortschreitungswiderstand symmetrischer zylindrischer Körper, um den sog. Formwiderstand. Vor meiner Untersuchung hat man zur Erklärung des Formwiderstandes die Theorie der sog. unstetigen Flüssigkeitsbewegungen herangezogen, die insbesonders durch LEVI-CIVITA eine klassisch vollkommene Gestalt bekommen hat und durch seine Schüler weitgehend ausgebaut worden ist. Diese Theorie liefert für viele Aufgaben mit der Wirklichkeit übereinstimmende Ergebnisse, die Vorgänge des Formwiderstandes kann sie indessen nicht beschreiben, da die Trennungsfläche zwischen zwei Flüssigkeiten gleicher Dicke und verschiedener Geschwindigkeit labil ist. Ich habe nun für den zweidimensionalen Fall untersucht, welche Wirbelgebilden, die hinter dem Körper entstehen und die Trennungsflächen ersetzen, stabil sind. Die Stabilitätsuntersuchung führte zur Erklärung der experimentell bereits früher bekannten Tatsache der Wirbelstrassen mit an zwei Seiten des Körpers abwechselnd sich bildenden Wirbeln und die Berechnung des Impulses des Wirbelsystems lieferte richtige Werte für den Widerstand. Ich erwähne diese Aufgabe hauptsächlich aus dem Grunde, weil ich glaube, dass die Theorie noch ausbaufähig ist. Es ist bisher nicht gelungen die Beziehung zwischen den Konstanten des Wirbelsystems und der Gestalt des Körpers zu ermitteln, ferner wissen wir garnicht, welche Wirbelgebilden im dreidimensionalen Falle stabil bestehen können. Auf diesem Gebiete kann man wahrscheinlich noch Erfolge erzielen, ohne die Theorie der idealen Flüssigkeiten zu verlassen.

Allerdings scheint die Gültigkeit der Theorie der Wirbelstrassen auf den Strömungszustand unterhalb des sogenannten *kritischen Wertes der Kennzahl* beschränkt zu sein. Oberhalb derselben beobachten wir keine diskreten Wirbelgebilden, sondern ein stetiges Wirbelfeld, in welchem offenbar die Durchmischung der Flüssigkeit, die Mischbewegung einzelner Wirbel eine massgebende Rolle spielt. Es muss zunächst dahin gestellt bleiben, wie weit die theoretische Erfassung

dieses Strömungszustandes, der mit der sog. turbulenten Strömung in Rohren und Kanälen analogen Gesetzen unterliegt, ohne Berücksichtigung der Zähigkeit möglich ist. Ich halte es für wahrscheinlich, dass wir zu einer befriedigenden Theorie nur dann gelangen können, wenn wir sowohl den Einfluss der Zähigkeit auf die Wirbel berücksichtigen als die Mischbewegung der Einzelwirbel einer Art statistischer Betrachtung unterwerfen.

6. - *Zähe Flüssigkeiten. Grenzschichttheorie.*

Ich wende mich nun zu jenen Aufgaben der Hydrodynamik, die eine Berücksichtigung der Zähigkeit erfordern. Hierzu gehört in erster Linie das Problem der Oberflächenreibung, das wir bei den letzten Betrachtungen über Formwiderstand ausser Acht gelassen haben. Hierzu gehört aber auch die allgemeine und für die mathematische Analyse wohl wichtigste Fragestellung nach dem Uebergang von der zähen zur idealen Flüssigkeit d. h. die Frage, deren Lösung erst eigentlich berechtigt, praktische Probleme mit Hilfe der Theorie der idealen Flüssigkeiten in Angriff zu nehmen. Die mathematischen Schwierigkeiten treten dadurch auf, dass man die Aufgaben nicht mehr auf Lösung linearer Differentialgleichungen zurückführen kann.

Ich beschränke mich auf zweidimensionale stationäre Probleme. Die Differentialgleichungen einer inkompressiblen Flüssigkeit lauten für diesen Fall:

$$
\begin{aligned}
&u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\\
(8)\qquad &u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial y}+\nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)\\
&\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0
\end{aligned}
$$

Ich habe bereits bemerkt, dass für den Fall, dass $\nu$ sehr gross ist und daher die in $u$ und $v$ quadratischen Glieder neben den Gliedern die mit $\nu$ multipliziert sind, gestrichen werden hönnen, die Integration der Gleichungen relativ einfach, sich gestaltet, doch ist dieser Fall für die Aerodynamik nicht von Interesse. Im Gegenteil: wir müssen den Fall $\nu =$ sehr klein ins Auge fassen und insbesondere den Grenzübergang zur idealen Flüssigkeit, also zu $\nu \to 0$ studieren. Wir erwähnten bereits ein praktisch wichtiges Problem, das das Studium dieses Grenzfalles verlangt, das Problem der Oberflächenreibung oder die Reibung zwischen zwei aneinander vorbeiströmenden Flüssigkeiten. Die Theorie der idealen Flüssigkeiten erlaubt eine Gleitung der Flüssigkeit an einem festen Körper oder die Gleitung zweier Flüssigkeiten längs ihrer Trennungsfläche, die Theorie der zähen Flüssigkeit verlangt dagegen Haftung bezw. stetigen Uebergang der Geschwindigkeit. Eine Näherungsmethode für kleine Werte von $\nu$ muss offenbar die richtigen Gesetze für Flüssigkeiten mit geringer Reibung, wie Luft oder Wasser liefern.

Prandtl hat den Grenzfall der Flüssigkeiten mit geringer Reibung anlässlich des Mathematiker Kongresses in Heidelberg im Jahre 1904 zum ersten Male behandelt. Seine Berechnungsmethode wurde später als die « Theorie der Grenzschicht » benannt. Die Methode hat lange Zeit wenig Beachtung gefunden, bis in mehreren aus dem Göttinger und Aachener Institut entstandenen Arbeiten die Brauchbarkeit der Ansätze für praktische Fälle gezeigt wurde. Man kann die Methode, wie ich gezeigt habe, als ein asymptotisches Integrationsverfahren für das Gleichungssystem (8) auffassen. Herr v. Mises hat vor einem Jahr in demselben Sinne eine nach seiner Ansicht neue und exaktere Ableitung des Grenzüberganges bew. des Näherungsverfahrens angegeben. Ich finde indessen, dass bei ihm dieselben Voraussetzungen, wie bei Prandtl vorhanden sind und seine Ableitung mit den unsrigen identisch ist. Er hat indessen dem Resultat eine elegantere Gestalt gegeben.

Wir greifen aus dem zweidimensionalen Strömungsbild einer inkompressiblen Flüssigkeit zwei Stromlinien heraus; um die Ideen zu fixieren nehmen wir an, dass die Stromlinie I mit der Begrenzung eines festen Körpers zusammenfällt und somit die Geschwindigkeit längs I gleich Null ist. Stromlinie II soll in einer endlichen Distanz von I bleiben, auch wenn wir zur Grenze $\nu=0$ (verschwindend kleine Reibung) übergehen. Wir transformieren zunächst das Gleichungssystem auf die Koordinaten $s$, $n$, wobei $s$ als die Bogenlänge längs der Stromlinien, $n$ längs der orthogonalen Trajektorien derselben genommen werden soll und als Unbekannte $q=\sqrt{u^2+v^2}$, $\theta=\operatorname{arc\,tg}\frac{v}{U}$ eingeführt werden.

Führt man in die so transformierten Gleichungen als Variable $\eta=\frac{n}{\sqrt{\nu}}$ statt $n$ ein und entwickelt nach Potenzen des Parameters $\nu$, so bekommt man als erste Näherung

$$(9)\qquad \begin{aligned} q\frac{\partial q}{\partial s} &= -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial s}+\frac{\partial^2 q}{\partial \eta^2} \\ 0 &= -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial \eta} \end{aligned}$$

Die Grösse $E=\frac{q^2}{2}+\frac{p}{\varrho}$ kann man als die Energie der Volumeinheit ansprechen. Die erste Gleichung heisst alsdann

$$(10)\qquad \frac{\partial E}{\partial s}=\frac{\partial^2 q}{\partial \eta^2}$$

Der Stromlinie II entspricht offenbar für $\nu=0$, der Wert $\eta=\infty$ und da $\left(\frac{\partial^2 q}{\partial \eta^2}\right)_{\eta=\infty}=0$ ist, so hat $E$ für $\eta=\infty$ einen längs der Stromlinie konstanten Wert. Wir nennen sie $E_0$; es ist offensichtlich

$$(11)\qquad E_0=\frac{q_0^2}{2}+\frac{p}{\varrho}$$

wobei wir mit $q_0(s)$ die Geschwindigkeit längs der Stromlinie II bezeichnen.

Wir bezeichnen die Grösse $E_0 - E = \frac{q_0^2 - q^2}{2}$ als den Energieverlust $H$ und erhalten für diese Grösse die Gleichung

$$\frac{\partial H}{\partial s} = -\frac{\partial^2 q}{\partial \eta^2} \tag{12}$$

wobei $q = \sqrt{q_0 - 2H}$ beträgt.

Man kann der Gleichung (12) eine hübschere Gestalt geben, wenn man, statt der Koordinaten $s$ und $\eta$, $\varphi$ und $\psi$ einführt wobei $\varphi$ und $\psi$ durch die Gleichungen $\frac{d\varphi}{ds} = q_0$ und $\frac{d\psi}{d\eta} = q$ bestimmt sind. Die Gleichung erhält man dann in der Form

$$\frac{\partial H}{\partial \varphi} q_0 = \frac{\partial^2 H}{\partial \psi^2} q$$

oder

$$\frac{\partial H}{\partial \varphi} = \frac{\partial^2 H}{\partial \psi^2} \sqrt{1 - \frac{2H}{q_0^2}} \tag{13}$$

Zur Lösung der Gleichung erscheint folgendes Iterationsverfahren als verlockend: Man nimmt als erste Näherung die Lösung der Gleicung

$$\frac{\partial H_1}{\partial \varphi} = \frac{\partial^2 H_1}{\partial \psi^2} \tag{14}$$

Alsdann setzen wir

$$H = H_1 + H_2$$

und erhalten

$$\frac{\partial H_2}{\partial \varphi} - \frac{\partial^2 H_2}{\partial \psi^2} = \left[\sqrt{1 - \frac{2H_1}{q_0^2}} - 1\right] \frac{\partial^2 H_1}{\partial \psi^2} \tag{15}$$

Das Verfahren hat die Bequemlichkeit, dass mann nur Lösungen der gewöhnlichen Wärmeleitungsgleichung zu bilden braucht, die in expliziter Form bekannt sind. Ein Beweis dafür, dass das Verfahren die Funktion $H$ und ihre Differentialquotienten wirklich annähert, steht indessen noch aus.

Die hier abgeleitete « Grenzschichtgleichung » ist in einigen Fällen numerisch gelöst worden. Es ergeben sich zwei Fälle: entweder erhält man ein einfaches System von $\psi$ — Linien ohne Verzweigung, oder aber zeigt die Stromlinie I bei einem bestimmten Wert eine Verzweigung, die man als « Ablösung » bezeichnet. Die Grenzschichttheorie hat zweifaches geleistet:

*a*) In den Fällen, in denen keinen Verzweigung vorhanden ist, hat sie es ermöglicht, die Reibungskräfte, die auf einen festen Körper wirken, zu berechnen.

*b*) Sie hat die Bedingungen festgestellt, unter welchen die Flüssigkeit die feste Wand verlässt.

Die Anwendung der Grenzschichttheorie ist indessen durch folgenden Umstand beschränkt. Die Grenzschichtgleichung stellt nur dann ein bestimmtes Problem dar, wenn wir den Geschwindigkeitsverlauf $q_0(s)$ längs der Stromlinie II, d. h. ausserhalb des von der Reibung beeinflussten Gebietes, ausser der eigentlichen « Grenzschicht » kennen. Dies ist wohl der Fall bei Vorgängen, bei welchen die Reibung das Gesamtströmungsbild nicht wesentlich ändert, z. B. bei Vorbei-

streichen einer Flüssigkeit an einer ebenen oder schwach gekrümmten Platte. In diesen Fällen kann man daher als Ausgangspunkt die Lösung nehmen, die man für ideale Flüssigkeiten erhält, wobei zunächst ein Gleiten an der Wand zugelassen ist, aus dieser Lösung der Geschwindigkeitsverlauf ausserhalb der Grenzschicht entnehmen und die Grenzschichtgleichung auflösen. In jenen Fällen aber, in welchen eine Ablösung erfolgt, ändert diese die Gesamtströmung derart, dass man den Geschwindigkeits — oder Druckverlauf aus der Grenzschicht nicht ohne Weiteres aus der Lösung für ideale Flüssigkeiten entnehmen kann.

In diesen Fällen stehen wir der allgemeinen Fragestellung gegenüber, wie die Lösung der Gleichungen für den Fall verschwindender Reibung aussehen muss, und in welcher Weise der Uebergang zur idealen Flüssigkeit vor sich geht?

7. *Die Oseensche Theorie des Widerstandes für kleine Reibung. Uebergang zur idealen Flüssigkeit.*

Herr OSEEN — der für die Integration der Gleichungen zäher Flüssigkeiten für verhältnismässig kleine Kennzahlen erfolgreiche Methoden entwickelt hat — versuchte seine Methoden auch auf den Fall verschwindender Reibung zu übertragen, insbesonders um zu einer Theorie des Fortschreitungswiderstandes zu gelangen. Bezüglich des Ueberganges zur idealen Flüssigkeit gelangt er zu dem Ergebnis, dass bei der « Grenzlösung » die Gebiete getrennt werden müssen, in welchen wirbellose Strömung bzw. Wirbelströmung stattfindet, und dass für die eimelnen Gebiete verschiedenen Grenzbedingungen bestehen. Um die Ideen zu fixieren wollen wir einen unendlich langen Kreiszylinder vom Halbmesser $r$ betrachten, der in einen unbegrenzten Parallelstrom von der Geschwindigkeit $U$ eintaucht. Aus den Wirbelsätzen folgt, dass längs jeder Stromlinie, die von $x=-\infty$ kommt und den Körper nicht berührt, der Wirbel verschwinden muss. Bezeichnet man die Wirbelintensität mit $\zeta$, so gilt für stationäre Strömung zäher Flüssigkeiten die Gleichung

$$u\frac{\partial\zeta}{\partial x}+v\frac{\partial\zeta}{\partial y}=\nu\left(\frac{\partial^4\zeta}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4\zeta}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4\zeta}{\partial y^4}\right) \tag{16}$$

Setzen wir $u=U+u'$, $v=v'$ und betrachten $u'$, $v'$ klein gegen $U$ und $\nu$ verschwindend klein, so erhalten wir als erste Näherung

$$U\frac{\partial\zeta}{\partial x}=0 \tag{17}$$

d. h. $\zeta$ kann nur eine Funktion von $y$ sein, längs zur $x$—Achse paralleler Linien ist die Wirbelgrösse konstant. Da indessen längs der Stromlinien, die von $x=-\infty$ kommen, $\zeta=0$ sein muss, so ist nur der Raum hinter dem Zylinder, begrenzt durch zwei Geraden $y=\pm r$ von Wirbelbewegung erfüllt, während ausserhalb dieses Raumes Potentialbewegung herrscht. Bezüglich der Randbe-

dingungen gelangt OSEEN zu dem Ergebnis, dass am Rande des Potentialbereichs (also an der Vorderseite) im Grenzfall eine Gleitung an der Wand entsteht, während im Wirbelbereich (an der Hinterseite) die Flüssigkeit an der Wand haftet.

Die Lösung, die all diesen Forderungen genügt, kann man in folgender Weise erzeugen: man berechnet zunächst eine Potentialbewegung so, dass an der Vorderseite des Zylinders die zur Wand senkrechte, an der Hinterseite indessen die zur $x$—Achse senkrechte Geschwindigkeitskomponente verschwindet. Die diesen Forderungen genügende Potentialströmung liefere an der Hinterwand des Zylinders die Geschwindigkeitskomponenten $\bar{u}(y)$. Ueberlagern wir nun auf die Potentialströmung innerhalb des Raumes $-r<y<r$ hinter dem Zylinder eine parallele Wirbelströmung $-\bar{u}(y)$, so genügen wir der Forderung $\frac{\partial \zeta}{\partial x}=0$ und erreichen, dass die Geschwindigkeit an der Wand verschwindet, dass daher die Haftbedingung erfüllt ist.

Die Potentialströmung zu bestimmen, die an der Vorderseite des Zylinder eine verschwindende Normalkomponente, an der Hinterseite eine verschwindende $y$—Komponente liefert, ist nun verhältnismässig einfach. Wir beachten, dass die komplexe Grösse $u-iv=w$ eine Funktion von $z=x+iy$ ist; bilden wir log $w=\log\sqrt{u^2+v^2}+i\theta$ so ist $-\theta$ der Neigungswinkel des Geschwindigkeitsvektors $(u, v)$. Es ist nun klar, dass sowohl $q=\sqrt{u^2+v^2}$ als $\theta$ harmonische Funktionen von $x$, $y$ sind, andererseits dass $\theta$ längs der ganzen Begrenzungslinie des Zylinders bekannt ist. Sind z. B. $\varrho$ und $a$ Polarkoordinaten in der $xy$ Ebene, so ist an der Vorderseite des Kreiszylinders $\theta=a-\frac{\pi}{2}$, an der Hinterseite $\theta=0$. Wir haben also bloss eine harmonische Funkion $\theta$ $(a, \varrho)$ so zu bestimmen, dass für $\varrho=r$ und $-\frac{\pi}{2}<a<\frac{\pi}{2}$ $\theta=a-\frac{\pi}{2}$, für $\frac{\pi}{2}<a<\frac{3\pi}{2}$ $\theta=0$ ist, was mit Hilfe elementarer Methoden durchgeführt werden kann.

Wenn auch diese Methode sehr geistreich erscheint, darf es nicht unerwähnt bleiben, dass die Geschwindigkeiten, die man neben $U$ als klein vorausgesetzt hat, sich teilweise grösser als $U$ ergeben, so dass man berechtigte Zweifel an der Zuverlässigkeit der Methode haben muss. Ich glaube, dass wann man die Näherungen weiter treiben würde, als Grenzlösung eine Helmholtz-Kirchoffsche diskontinuierliche Potentialbewegung sich ergeben, d. h. der Wirbelraum in einen Totwasserraum sich verwandeln würde. Eine solche Grenzlösung hat mit der Oseenschen Lösung gemein, dass vor dem Zylinder und ausserhalb der Unstetigkeitsfläche hinter demselben Potentialströmung herrscht, ferner dass an der vorderen Wand eine Gleitung stattfindet, die in Wirklichkeit durch eine Grenzschicht ersetzt ist. Der Unterschied besteht darin, dass nach der Helmholtzschen Lösung hinten ein Totwasserbereich vorhanden ist, an welchem die Flüssigkeit vorbeigleitet, während nach Oseen ein Wirbelraum mit geknickten Stromlinien

entsteht. Die Helmholtzsche Lösung scheint mir an und für sich widerspruchslos zu sein; die physikalische Wirklichkeit entspricht weder der einen noch der anderen, da die wirkliche Strömung offenbar infolge mangelnder Stabilität keine stationäre ist.

Ich hoffe, dass man aus dieser kurzen Darstellung der wichtigsten Probleme ersehen kann, dass die Hydro-und Aerodynamik noch einer weitgehenden Mitarbeit der Mathematiker bedarf um ihre wichtigsten Fragen zu einem befriedigenden Abschluss zu bringen.

G. D. BIRKHOFF

# QUELQUES ÉLÉMENTS MATHÉMATIQUES DE L'ART

## 1. *Introduction d'une formule esthétique.*

Presque tous les hommes à tendances philosophiques se sont occupés plus ou moins du problème du beau. Par conséquent, il existe aujourd'hui une littérature très étendue qui traite le problème à maints points de vue différents. J'ai l'intention de le considérer aujourd'hui une fois de plus, mais d'un point de vue un peu mathématique, qui ne semble pas avoir été développé jusqu'ici, quoiqu'on puisse trouver en plusieurs endroits des idées vagues au fond analogues.

L'expérience esthétique type peut être regardée comme renfermant trois moments successifs: 1° un effort préliminaire, nécessaire pour bien saisir l'objet, et proportionnel à la complexité $(C)$ de l'objet; 2° le sentiment du plaisir ou mesure esthétique $(M)$ qui récompense cet effort préliminaire; 3° ensuite la perception consciente que l'objet jouit d'une certaine harmonie ou symétrie ou ordre $(O)$, plus ou moins caché, qui semble être une condition nécessaire, sinon suffisante, pour l'expérience esthétique elle-même.

Ainsi se pose presque immédiatement la question, de déterminer, dans un cas donné, jusqu'à quel point cette mesure esthétique n'est que l'effet de la densité des relations d'ordre, c'est à dire leur rapport à la complexité. Et ainsi semble-t-il bien naturel de proposer une formule telle que

$$M = \frac{O}{C}.$$

Nous chercherons à obtenir une telle formule plus tard, au moins dans quelques cas extrêmement simples, et à la rendre vraisemblable par des observations élémentaires psychologiques.

Ce nombre $M$ ainsi obtenu, donne-t-il vraiment une mesure de la valeur esthétique? C'est là une question intéressante et fondamentale qui doit être considérée dans chaque cas particulier.

Le besoin esthétique bien connu de l'unité dans la variété est évidemment étroitement lié avec notre formule. La définition du beau comme présentant le nombre maximum d'idées dans le minimum de temps, donnée par le hollandais Hemsterhuis au dix-huitième siècle, est aussi d'une nature analogue.

Mais notre point de vue n'est pas qu'une formule comme la nôtre doive être considérée comme définitive. Il est plutôt le suivant: il existe des éléments que l'on peut analyser et desquels dépend l'effet total esthétique, au moins, jusqu'à un certain point. Quand on cherche à examiner ces éléments, on trouve souvent qu'ils comportent un caractère tout à fait objectif et mathématique. Nous ne considérons ici que le rôle de ces éléments mathématiques. Quoique ces éléments soient toujours les mêmes, il est bien évident que leur importance relative n'est pas la même pour tout le monde. Donc nous regardons notre analyse comme une espèce de norme qui peut rendre beaucoup de services.

Il semble impossible de comparer le plaisir esthétique que produisent des objets tout à fait différents, par exemple un vase et une mélodie. Ainsi sommes-nous conduits à ne considérer qu'une classe bien définie d'objets semblables. De plus, les hommes diffèrent beaucoup entre eux à l'égard de leurs sentiments esthétiques, selon leur race et leur pays, selon leur capacité naturelle et la variété de leurs expériences artistiques, et aussi selon leur état actuel. Donc il sera nécessaire de faire abstraction de toutes ces conditions variables, et de ne considérer qu'un individu « normal » ou « idéal » qui, bien entendu, n'existe pas. Pour nous, cet individu sera cultivé, mais non pas très raffiné au point de vue esthétique.

Une fois ces conditions satisfaites, on peut espérer obtenir une mesure esthétique, parce que « l'individu normal » peut ranger les différents objets de la classe considérée suivant leur mérite esthétique. C'est seulement cette grandeur relative qui nous intéresse.

Il faut bien comprendre la vraie nature des deux autres variables $C$ et $O$ qui apparaissent à droite dans notre équation. On ne trouve en général aucune difficulté à mesurer la complexité $C$, parce qu'une mesure presque naturelle se présente toujours. Par exemple la complexité d'une mélodie simple serait prise comme proportionnelle au nombre de notes. La variable $O$, au contraire, est difficile à mesurer d'une manière objective tout à fait satisfaisante. Pour bien réussir, il faut compter tous les éléments d'ordre indépendants entre eux qui y entrent et qui donnent du plaisir: non seulement les éléments évidents, mais aussi les éléments cachés. La manière d'estimer ce nombre doit être aussi simple et aussi conforme aux faits psychologiques que possible. Mais en tout cas il ne faut pas oublier que la régle choisie reste toujours empirique.

Pour souligner ce caractère empirique de la formule, observons que les éléments $M$, $O$, $C$ sont des valeurs sociales et d'une nature peu précise, comme toutes les autres valeurs de cette espèce. Par exemple, la notion de la puissance d'achat de l'argent possède une importance considerable dans les recherches économiques. En effet, cette notion fournit une base à l'aide de laquelle on peut faire beaucoup de comparaisons très utiles. Néanmoins les conventions sur lesquelles est fondée la mesure de cette puissance contiennent beaucoup d'éléments tout à fait empiriques.

En même temps faut-il ajouter que cette voie empirique est la seule par laquelle on peut espérer de traiter les valeurs sociales, comme la beauté, sans abandonner l'esprit scientifique de notre temps.

Sans doute, l'art actuel s'occupe le plus souvent des valeurs que l'on sent sans pouvoir les analyser. Ce sont justement les relations d'ordre qui semblent être au-dessus de l'analyse dont l'effet est le plus profond. Mais cette circonstance caractéristique ne diminue pas l'importance d'une analyse scientifique aussi complète que possible, parce que c'est toujours en mettant en pleine lumière les principes scientifiques que l'intuition elle-même se trouve libérée.

Donc en étudiant le rôle d'une telle formule dans les arts nous n'avons nullement l'intention de nier le rôle énorme et incontestable des éléments purement intuitifs. La distinction souvent signalée entre la forme et la matière n'est que celle entre les éléments non intuitifs et les éléments intuitifs. Ici nous ne considérons que la forme, et, de plus, nous nous bornons à quelques cas d'une simplicité extrême.

Selon notre formule, le manque total des relations d'ordre indique le manque de valeur esthétique: $E=0$. En tout cas, nous chercherons à choisir les définitions telles que, dans le cas le plus favorable, le nombre $O$ des relations d'ordre soit à peu près égal au nombre $C$ qui indique la complexité. Donc dans le cas de la beauté complète on a une valeur esthétique $E=1$, à peu près. Il ne faut pas oublier que ce résultat subsiste seulement par convention.

## 2. *Quelques généralités.*

Quoique l'application de la formule esthétique soit tout à fait différente dans les divers domaines, il existe quelques faits généraux plus ou moins vagues qui doivent être signalés:

1) Bien souvent il est impossible d'isoler complètement le côté formel de l'art, parce que l'objet est un symbole si puissant que les relations d'un caractère intuitif ou connotatif ont malgré tout leur effet. Par exemple, la forme en architecture devient davantage que la forme purement géometrique, si l'on représente une fleur stylisée. Dans tous les cas où de telles relations existent, elles contribuent à augmenter ou diminuer le sentiment esthétique, suivant leur nature. Alors, pour bien comprendre le jugement esthétique, il faut toujours tenir compte de telles relations connotatives s'il y en a.

2) Un élément particulier d'ordre peut entrer plusieur fois dans le même objet. Un tel élément ne doit pas être compté chaque fois qu'il y entre, parce que l'intérêt diminue rapidement avec la répétition. C'est pourquoi nous aurons presque toujours à restreindre l'importance de chaque élément d'ordre lorsque nous évaluerons son influence dans le calcul de $O$.

Il arrive quelquefois que des éléments d'ordre ne donnent pas de plaisir et

même causent une impression désagréable. Cette circonstance indique que dans la formule quelques éléments ne paraissent pas, ou bien paraissent avec un signe négatif.

3) Les objets de la classe considérée peuvent varier, et quelquefois les cas intermédiaires ne sont pas d'un caractère bien determiné, de sorte qu'il devient difficile de décider si certaines relations d'ordre y entrent ou n'y entrent pas. Cette situation contribue en général à diminuer le plaisir esthétique. Ainsi ne trouvons-nous pas agréable un rectangle qui diffère très peu d'un carré.

4) Il faut remarquer en même temps un certain besoin psychologique pour un centre, un point d'intérêt, par lequel on peut convenablement terminer la considération de l'objet. Comme exemple, nous citons la nécessité de terminer une mélodie par la note fondamentale. À notre point de vue, l'existence d'un tel centre apparaît en général comme une condition préliminaire qui doit être satisfaite.

5) Supposons qu'il existe deux objets de la même classe qui possédent presque les mêmes relations d'ordre $O$ et au même degré, mais que l'un soit plus compliqué que l'autre. Alors, selon la formule esthétique elle-même, nous trouvons moins de plaisir esthétique dans l'objet le plus compliqué. Mais l'expérience indique qu'en dehors de cet effet attendu, il y a aussi l'impression que l'objet plus compliqué manque de nouveauté, ce qui détruit presque entièrement le plaisir esthétique légitime. Par exemple, la forme géométrique d'une étoile régulière à cinq pointes possède une nouveauté par rapport à laquelle l'étoile à sept pointes paraît presque sans intérêt.

Nous avons voulu signaler ces faits avant de faire toute application particulière de la formule, parce qu'ils jouent un rôle assez important.

### 3. *Les formes polygonales.*

La première classe d'objets que nous allons considérer est constituée par les diverses formes polygonales. On ne peut pas dénier à ces formes polygonales un caractère esthétique, que démontre leur emploi considérable dans l'art actuel. Nous n'avons ici aucun intérêt à classer les polygones indifférents ou laids, selon leur manque d'intérêt; pour de tels polygones on aura toujours $M=0$ d'après notre formule. Il est nécessaire de choisir une classe particulière bien déterminée, par exemple celle des polygones en porcelaine d'une superficie et d'une épaisseur données, tandis que les surfaces sont d'une couleur choisie et de la même nature à tous les égards. Ainsi définissons-nous avec précision la classe des objets qui doivent être comparés.

Pour souligner encore une fois le besoin de bien définir une classe d'objets, voyons ce qui arrive si l'on considère les bijoux de forme polygonale. Ici le besoin de préciser une grandeur est immédiat parce que l'intérêt d'un bijou croît avec sa dimension. Pour une raison semblable il faut convenir que tous

les bijoux soient de la même couleur et de la même qualité. Mais, même dans ces conditions, il est bien possible qu'une forme polygonale particulière reflète mieux la lumière; et cette circonstance aura aussi son importance esthétique. Ainsi paraît-il évident que notre choix d'objets en porcelaine a des avantages incontestables, parce qu'il n'y a vraiment que leur forme qui sépare au point de vue esthétique les membres de la classe les uns des autres.

Faisons aussi une remarque qui est essentielle pour fixer l'état psychologique de l'observateur normal. Quand nous regardons un tel polygone en porcelaine posé sur une table, la valeur esthétique ne paraît pas très évidente parce que d'habitude nous ne considérons pas de tels objets, placé sur une table horizontale, seulement au point de vue esthétique; il vaut mieux les regarder dans un plan vertical. De plus, nous choisissons dans le plan vertical une orientation spéciale du polygone qui nous paraît favorable. Par exemple s'il y a des axes de symétries, en général nous en mettons un dans la direction verticale. Nous conviendrons que toutes ces précautions préliminaires soient observées.

Mais même dans ces circonstances, il est nécessaire de ne pas en oublier d'autres qui pourraient introduire des connotations. Par exemple, un polygone avec beaucoup de petits côtés, tous situés sur une seule courbe, suggère de lui-même cette courbe. Ainsi faut-il étudier la question de la beauté des courbes planes avant de considérer la beauté d'un tel polygone, parce que cette dernière résulte presque entièrement de la beauté de la courbe. Donc la considération de la connotation extérieure peut entrer pour donner plus ou moins d'intérêt au polygone. Nous faisons ici naturellement abstraction d'une telle connotation.

Pour aborder notre question il faut convenablement définir $O$ et $C$.

La complexité $C$ pour un tel polygone sera par définition le plus petit nombre de droites indéfinies qui contiennent tous ses côtés.

L'explication psychologique de cette règle empirique est évidente. Pour les polygones convexes et aussi pour les polygones qui ne sont pas convexes mais qui ne possèdent pas deux côtés situés sur une même droite, $C$ est le nombre des côtés, et ce choix semble parfaitement raisonnable. Mais quand il existe un polygone non convexe avec deux ou plusieurs côtés sur une même droite, nous voyons tout de suite la ligne qui contient ces côtés, d'où notre définition.

Pour évaluer $O$, nous aurons besoin de traiter successivement cinq éléments additifs qui composent $O$ et qui jouent évidemment un rôle assez important.

Premièrement, l'existence d'une symétrie autour de l'axe vertical doit être considérée. L'organisation du polygone entier qui résulte d'une telle symétrie a une grande importance. Nous choisissons cet élément d'ordre $V$ de symétrie autour de l'axe vertical comme l'unité. Donc $V$ a la valeur 1 ou la valeur 0 selon qu'il y a ou qu'il n'y a pas une telle symétrie: $V = V\ (0, 1)$. S'il n'y a pas une telle symétrie verticale, tandis qu'il existe une symétrie autour d'un axe non vertical, cette symétrie est d'une importance tout à fait inférieure.

Tous les polygones de la figure (fig. 1) jouissent de la symétrie verticale, sauf les polygones *k*, *o*, *r*, *s*, *t*.

Dans le cas où il y a une telle symétrie verticale, nous avons l'impression que le polygone est en équilibre. Ce sentiment est à peu près indépendant de celui

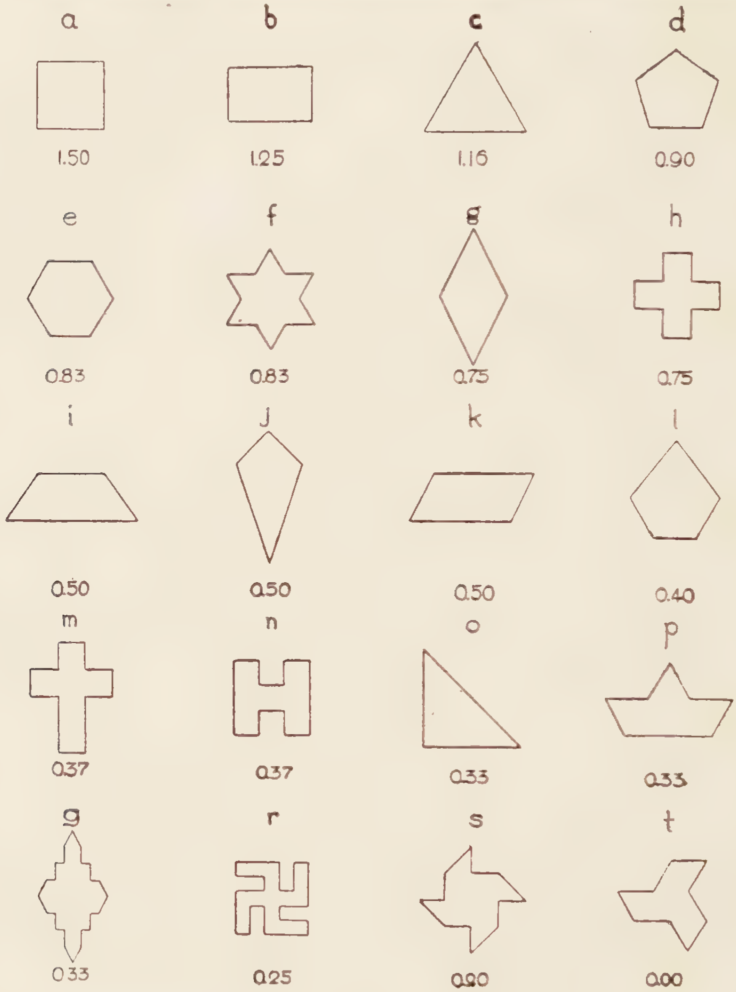



Fig. 1.

de la symétrie. Dans le cas contraire nous trouvons que le polygone est en équilibre s'il repose sur un côté horizontal assez long, ou sur deux ou plusieurs points assez séparés, tandis que le centre de gravité se trouve entre les points extrêmes de support. Sans vouloir préciser ici devantage les conditions objectives, nous convenons que l'élément $E$ correspond à la valeur 1 ou $-1$, selon que le polygone paraît en équilibre ou non. Nous prenons $E=-1$ dans ce deuxième cas, parce que

le sentiment éprouvé est désagréable. Donc nous avons $E = E\ (1, -1)$. Parmi les polygones $k$, $o$, $r$, $s$, $t$, seulement les deux derniers ne sont pas en équilibre.

Considérons maintenant le rôle de la symétrie de rotation. Avec une telle symétrie, il existe un nombre minimum $q$ tel qu'en faisant tourner le polygone $q$ fois autour de son centre d'un angle $\frac{2\pi}{q}$, il reprend la position donnée. Ici on a pour région fondamentale du groupe correspondant des mouvements un secteur d'angle $\frac{2\pi}{q}$ et de sommet au centre. Mais dans le cas d'une symétrie verticale nous avons comme région fondamentale un demi-plan. Ainsi sommes nous conduits à regarder la valeur $R$ de l'élément provenant de la symétrie de rotation comme égale à $\frac{q}{2}$. On pourrait croire que peut-être il faut considérer tout le groupe du polygone à la fois. Mais on peut constater par l'observation directe qu'on apprécie les deux éléments $V$ et $R$ successivement et presque indépendamment, l'un de l'autre. Notre procédé est donc plus conforme aux faits psychologiques.

Cependant il faut maintenant faire un cas d'exception quand il y a une rotation $q = 3$ mais pas d'axe de symétrie. On le voit tout de suite en considérant le dernier polygone de la figure. Dans ce cas exceptionnel, l'angle de rotation est trop grand pour être apprécié, sans l'aide d'une symétrie axiale. Dans ce cas nous prenons $R = 0$. Il faut donc écrire: $R = R\ (0, \frac{q}{2}$ ou $0)$.

Le quatrième élément que nous considérons est le suivant: le polygone entier peut avoir plusieurs côtés situés sur un réseau uniforme formé di lignes horizontales et verticales, tel qu'il existe une organisation assez évidente du polygone entier. Cette propriété correspond à l'élément $HV$ de $O$ que nous allons envisager. Pour le bien définir nous choississons les règles suivantes: quand toutes les lignes du polygone sont horizontales ou verticales, et remplissent tout à fait un rectangle d'un réseau uniforme, nous prenons $HV = 2$. C'est ce qui arrive pour les polygones $a$, $b$, $h$, $n$, $r$, de la figure. Dans d'autres cas, tous les sommets du polygone sont les sommets d'un tel réseau, mais l'effet esthétique produit n'est pas également agréable, à cause de l'une des raisons suivantes: 1° quoique tous les côtés soient horizontaux ou verticaux, leurs lignes ne remplissent pas complètement un rectangle du réseau mais y laissent quelques lignes isolées exceptionnelles; 2° il existe un seul côté, qui se trouve avec ses symétriques dans les directions diagonales du réseau, et les lignes horizontales et verticales avec les axes de symétrie remplissent toujours un rectangle du réseau. Dans ces deux cas nous écrivons $HV = 1$, comme, par exemple, dans les cas $m$, $q$, $s$ de la figure. Pour tout autre cas nous écrivons $HV = 0$, même par exemple si tous les côtés sont verticaux ou horizontaux. Il est bien évident que la règle adoptée qui détermine $HV$ est très arbitraire, mais elle doit être ainsi, parce qu'il existe un grand nombre de cas où le polygone est approximativement situé sur un tel réseau uniforme.

Donc nous pouvons écrire: $HV = HV(0, 1, 2)$.

En dernier lieu, nous voulons considérer un élément négatif $-F$ de la forme générale, mais qui échappe à l'analyse ci-dessus. Pour avoir une forme satisfaisante, il faut que toute demi-droite issue du centre du polygone ne le coupe qu'une seule fois, ou bien que toute ligne verticale ou horizontale ne le coupe pas plus de deux fois. Quand l'une au moins de ces deux conditions est remplie, nous prenons $F=0$. Mais dans tout autre cas nous prenons $F=2$, parce qu'alors le polygone a l'air de ne pas avoir une forme satisfaisante, comme le montrent les polygones $n$, $r$ de la figure. Donc nous avons $F=F(0, 2)$.

Avec ces définitions préliminaires nous pouvons annoncer notre formule esthétique pour de telles formes polygonales :

$$M=\frac{V+E+R+HV-F}{C}$$

Dans le cas où $M$ est negatif selon cette formule, le polygone est tout à fait indifférent au point de vue esthétique. Selon cette formule $M$ peut être plus grand que 1. Cela n'arrive que pour le carré ($M=1.50$), le rectangle ($M=1.25$) et le triangle équilatéral ($M=1.16$).

L'analyse qui nous a conduit à cette formule a évidemment des rapports avec le groupe des mouvements dans le plan. L'importance du groupe de tels mouvements dans la question de l'esthétique des figures géometriques est bien connue. Nous nous contentons de citer ici l'ouvrage important de SPEISER (1) où l'on trouve des exemples très intéressants.

Comment cette formule s'accorde-t-elle avec l'expérience? C'est là une question à laquelle chacun doit répondre pour soi-même. Pour moi, les résultats qu'elle donne semblent assez satisfaisants. Dans la figure ci-dessus sont indiqués quelques polygones rangés suivant leur mérite d'après notre formule. Ainsi chacun peut juger très facilement sur ces exemples. En employant ainsi la formule, il ne faut pas oublier que plusieurs de ces figures ont des connotations agréables ou désagréables, dont nous faisons abstraction. Par exemple le Svastika ressemble beacoup à deux lignes brisées qui se coupent en un centre. Il y a ici une connotation qui relie ce polygone à une figure formée par deux lignes ouvertes. Ce fait contribue à lui donner une valeur esthétique en dehors de celle qu'il a comme polygone.

D'après ce que nous avons dit au commencement, on pourra formuler d'autres buts esthétiques, soit en cherchant à modifier notre formule tout en employant les mêmes éléments, soit en généralisant convenablement ces éléments, soit en introduisant des éléments nouveaux.

Comme exemple du premier type de modification, nous citons la suivante: Quand on ne veut pas s'occuper des polygones trop simples, on pourra regarder la complexité elle-même comme but légitime et nécessaire. On aurait donc une

---

(1) A. SPEISER, *Die Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung*, Berlin (1923).

formule modifiée, par exemple, comme celle-ci : $M = O/(C+k)$. A l'aide d'une telle formule on obtient une mesure esthétique bien différente de la nôtre, qui n'accorde pas tant de mérite aux polygones simples.

Le deuxième type de modification généralise l'esprit de la formule. Nous proposons la généralisation particulière suivante : nous écrivons en tout cas $R = R\left(0, \frac{q}{2}\right)$ afin de ne plus exclure le cas d'une rotation d'un angle $\frac{2\pi}{3}$, même s'il n'y a pas de symétrie autour d'une ligne ; nous admettons aussi toute division régulière du plan au lieu de la division par un réseau uniforme avec des droites horizontales et verticales, en généralisant convenablement le terme $HV$ en $O$. Ainsi nous attacherons beaucoup plus d'intérêt à des polygones comme le dernier de la figure.

D'autres éléments ne peuvent pas s'introduire aussi naturellement, parce que nous avons épuisé les éléments d'ordre tout à fait évidents. Par exemple, nous pouvons admettre parmi $O$ les égalités des côtés ou des angles, ou l'existence d'angles droits. Mais je ne suis pas convaincu qu'une telle modification corresponde aux faits psychologiques actuels, parce que nous ne voyons pas ordinairement de telles relations avec intérêt.

En résumé, le domaine esthétique très restreint des formes polygonales ne semble contenir que les éléments que nous avons déjà signalés. Voilà, je crois, le fait fondamental. Mais il existe beaucoup de mesures esthétiques légitimes, dont nous n'avons considéré qu'une seule. Néanmoins j'espère que la formule choisie correspond assez bien au jugement de l'individu normal.

## 4. *Les réseaux.*

Nous allons considérer brièvement les réseaux dans un plan vertical. De tels réseaux sont souvent employés ; il suffitt de citer les réseaux de carreaux ou de briques, les réseaux de vitraux, les treillis, etc. Dans tous ces cas nous constatons immediatement l'existence de valeurs esthétiques simples. Mais il semble assez difficile de trouver un cas actuel où entrent seulement les éléments visuels que nous voulons considérer. Ainsi les réseaux en briques doivent être construits conformément aux besoins mécaniques simples, les réseaux de vitraux se trouvent souvent dans les églises, où il y a un besoin spécial de souligner la direction verticale. Nous chercherons à faire abstraction de ces éléments connotatifs.

Nous ne considérons que le cas où tous les polygones élémentaires sont convexes. De plus, nous conviendrons que le réseau a des axes verticaux et horizontaux de symétrie. Ces conditions sont presque toujours satisfaites dans la pratique.

Pour définir la mesure $M$ d'un tel réseau, nous réduirons autant que possible la question à celle des formes polygonales que nous avons déjà considérée.

En regardant le réseau dans son ensemble, nous cherchons une région fondamentale $F$ composée d'un nombre minimum de polygones élémentaires et jouissant

des deux propriétés suivantes : 1° $F$ admet autant que possible les types de symétrie et de rotation qui sont admis par le réseau ; 2° la région $F$ et les régions $F'$, $F''$,...., obtenues par les translations du groupe du réseau suffisent à couvrir complètement le réseau. Nous prendrons ce nombre minimum comme la mesure $C$ de la complexité du réseau.

Parmi les polygones qui se trouvent dans la région $F$, quelques-uns nous semblent particulièrement intéressants. Il y a lieu ici de distinguer entre les polygones élémentaires, et les polygones complexes qui sont composés de polygones élémentaires. Tous les polygones intéressants possèdent un axe vertical de symétrie. Mais les polygones complexes intéressants doivent posséder de plus le même centre, et le même groupe que $F$. En particulier quand $F$ est elle-même complexe, elle rentre toujours dans cette catégorie.

L'intérêt de tels polygones n'augmente pas indéfiniment avec leur répétition dans $F$. On constate immédiatement que la répétition des carrés et rectangles est sans valeur, et que pour les autres polygones élémentaires une seule répétition est aussi agréable que plusieurs. Évidemment les polygones complexes du type signalé ne sont pas répétés dans $F$.

Il y a aussi une autre circonstance qui joue un rôle considérable: si le centre de la région $F$ n'est pas situé dans l'intérieur d'un polygone élémentaire, les yeux ne peuvent pas se reposer sur ce centre, mais ils suivent les lignes des côtés dans toutes les directions possibles. Dans ce cas le besoin d'un centre de repos n'est pas satisfait.

Ces faits suggèrent la méthode suivante pour définir l'ordre $O$ du réseau. Faisons la somme $S$ des mesures esthétiques de tous ces polygones intéressants, mais à la condition de compter un seulement pour les carrés et les rectangles, et deux fois tout autre polygone répété plusieur fois. Ecrivons aussi $R=0$ s'il y a un centre de repos dans $F$ et 1 dans les cas contraire. Alors l'ordre $O$ peut être défini par la formule

$$O=S-R.$$

Ainsi la mesure esthétique $M$ du réseau est complètement définie.

Dans la fig. 2, on voit une série de réseaux rangés suivant leur mesure $M$. Nous ne pouvons pas ajouter ici d'autres remarques sur cette série. Disons seulement que le réseau hexagonal $c$ qui occupe une position assez élevée dans cette série est très souvent employé en Orient pour son effet décoratif.

## 5. *Les formes de vases.*

C'est un fait bien connu que les hommes qui fabriquent les vases, aussi bien que les connaisseurs, ont un sens très délicat de la forme du contour d'un vase. Beaucoup d'autres éléments jouent un rôle, mais c'est cet élément de forme pure qui semble distinguer les meilleurs vases des autres. On comprend natu-

rellement que beaucoup d'autres éléments existent: l'intérêt historique, la décoration, la surface, etc. La théorie proposée ici, quelque simple qu'elle soit, me

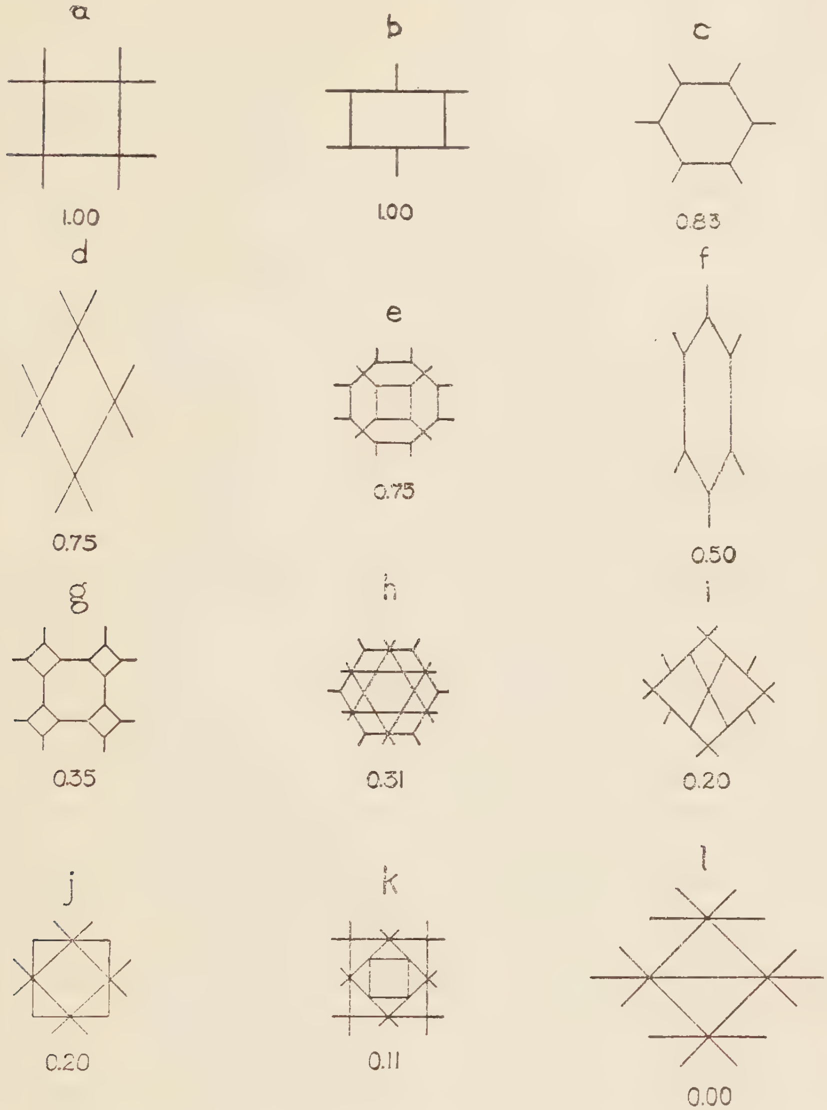



Fig. 2.

semble appropriée à expliquer cet élément de forme pure. À mon avis, une explication telle que celle qu'a cherchée Hambidge [1] et qui repose sur une analyse mystique et arbitraire de chaque vase en particulier, ne peut pas être bien fondée.

---

[1] J. Hambidge, *Dynamic Symmetry; the Greek Vase*, New Haven and New York (1920).

Nous adoptons toujours la figure plane du contour du vase (l'axe étant vertical) comme une espèce de représentation symbolique. Ce symbole a le mérite de bien suggérer la forme dans l'espace. Vraiment, quand on regarde un vase à une distance de quelques mètres, c'est cette figure qu'on voit assez précisément. En ce cas, le contour en perspective diffère peu du contour symbolique.

En esquissant une théorie, nous essaierons encore de lui donner l'apparence d'être vraisemblable et d'accord avec les faits psychologiques.

Qu'y a-t-il pour fixer l'attention quand on regarde un vase? Il existe certains points qui sont les seuls sur lesquels les yeux peuvent se reposer. Ce sont précisément: 1) les quatre points qui terminent ce contour, 2) les points de ce contour où la tangente menée à ce contour a une direction verticale ou horizontale, 3) les points où cette direction change brusquement, 4) les points d'inflexion où la courbure passe par zéro, et 5) les centres du vase situés sur l'axe aux points où les droites horizontales de longueur maximum ou minimum traversent cet axe.

Nous appellerons les points 1)-4) du contour « points caractéristiques » du vase, et nous appelerons les directions tangentielles à ces points les directions caractéristiques ».

Quand tous ces éléments caractéristiques sont déterminés, on trouve qu'au point de vue pratique il n'y a jamais plus d'une seule courbe trés-régulière qui puisse former la ligne de contour. C'est pourquoi nous sommes justifiés à fixer notre attention seulement sur les éléments caractéristiques, en ne considérant plus l'importante question de la régularité de la courbe. En général la courbe apparaitra visuelle d'être suffisamment régulière, pourvu que la courbure soit aussi petite que possible, et qu'elle croisse ou décroisse assez lentement. Il est bien entendu qu'on peut choisir des éléments caractéristiques auxquels ne correspond pas même une seule courbe régulière. Il y a aussi quelques autres inégalités qui restreignent la forme générale et qu'on doit considérer. Par exemple la dimension horizontale maximum ne doit pas excéder la dimension totale verticale.

La complexité $C$ qui constitue le dénominateur dans notre formule sera mesurée par le nombre total des points caractéristiques. Cela semble être une définition bien posée. Pour les vases ordinaires, $C$ n'excéde pas 20.

Quelles sont les relations $O$ qui ont de l'intérêt esthétique? Pour répondre à cette question, nous commençons par observer que l'axe lui-même divise en deux toute droite horizontale qui coupe le vase en deux points caractéristiques symétriques. Nous admettons que les yeux apprécient l'égalité de deux distances verticales entre ces lignes horizontales, et qu'ils apprécient aussi le rapport 1 : 2 pour de telles distances. Le premier parmi les quatre termes qui constituent le numérateur $O$ est le nombre $V$ de les relations entre longueurs verticales; bien entendu nous ne comptons que les égalités indépendantes au point de vue mathématique.

Comme deuxième élément $H$ de $O$, nous prendrons le nombre de relations pareillement indépendantes entre les longueurs totales de ces lignes horizontales.

En troisième lieu nous définissons l'élément $HV$ correspondant aux relations d'égalité entre ces deux types de distance qui sont indépendantes des égalités déjà numérotées.

En dernier lieu, il reste à envisager les relations entre les directions tangentes aux points caractéristiques d'un seul côté du vase. Une relation qui semble être sentie immédiatement d'une manière favorable par tout le monde, c'est celle de la perpendicularité des tangentes extrêmes. Nous ne comptons pas seulement toutes les perpendicularités et parallélismes (indépendants) des tangentes caractéristiques, mais aussi le nombre des tangentes horizontales aux points caractéristiques, et le nombre des normales aux points caractéristiques qui passent par un un centre. Le nombre de ces éléments donne le dernier terme $T$ de $O$ provenant des tangentes caractéristiques.

Ainsi nous aurons pour notre formule complète

$$M = \frac{H + V + HV + T}{C}$$

où la signification des termes a été déjà expliquée.

Une question immédiate se présente. Parmi tant de quantités et à cause de l'inexactitude inévitable qui empêche une détermination exacte des points caractéristiques et des directions des tangentes, ne trouvera-t-on pas toujours beaucoup de ces relations d'égalité pour un vase quelconque? L'examen des vases montre que de telles relations n'existent pas en général. Au lieu de traiter cette question ici, je préfère donner quelques exemples particuliers. J'ai examiné les huit premières photographies en couleurs d'anciens vases chinois qui paraissent dans le livre récent de HOBSON [1]. Ces photographies donnent les faits visuels. Elles constituent un témoignage tout à fait indiscutable, parce que rien n'est plus certain que ces vases ont été dessinés, et estimés simplement au moyen du jugement purement intuitif. Presque tous ces vases contiennent un nombre de relations $O$ qui dépasse beaucoup ce qu'on pourrait attendre du hasard ; et les vases qui donnent la meilleure impression esthétique sont justement ceux pour lesquels la mesure $M$ est la plus grande. Les contours de ces vases avec leur réseaux caractéristiques et leur mesure esthétique apparaissent dans les figures $3a$ et $3b$.

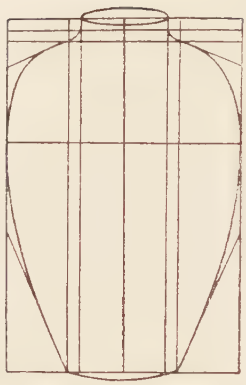
Considérons comme un des cas extrêmes le premier et le dernier de ces vases. Tous deux ont une courbe semblable et de grande régularité, mais l'une est presque sans relation du type cherché ($O=1$) tandis que l'autre possède sept de ces relations ($O=7$). Il me semble presque évident que la différence considérable de mérite esthétique résulte de la différence entre le nombre des relations $O$.

Il est intéressant de remarquer que notre formule suggére comment l'on peut

---

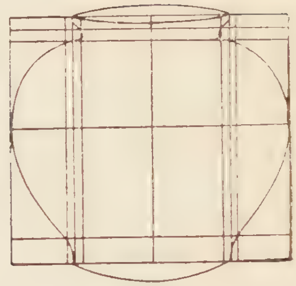
[1] HOBSON, *Chinese Art*, New York (1927). Le nombre un caractères romains audessus de chaque figure sont tirés de cet ouvrage.

XV.



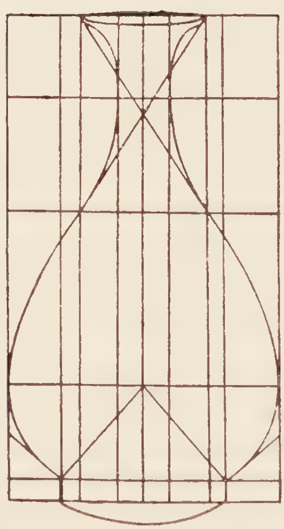
C=10, O=7, M=.70
v=2, h=2, v,h=1, t=2.

VII.



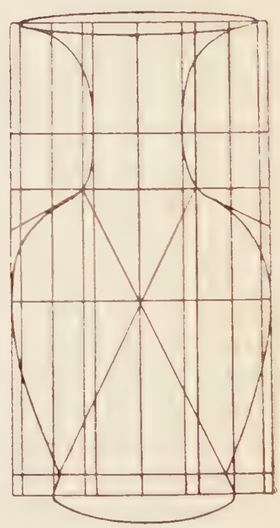
C=12, O=8, M=.67
v=3, h=3, v,h=1, t=1

XXI.



C=12, O=7, M=.67
v=1, h=3, v,h=0, t=3.

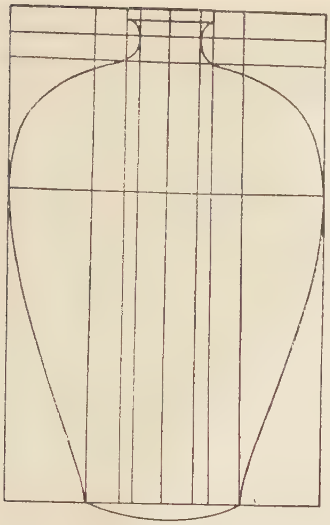
XXV.



C=12, O=8, M=.67
v=3, h=2, v,h=1, t=2.

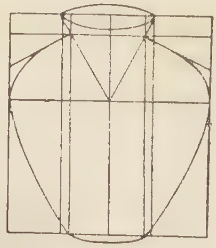
Fig. 3 *a*.

XXII.



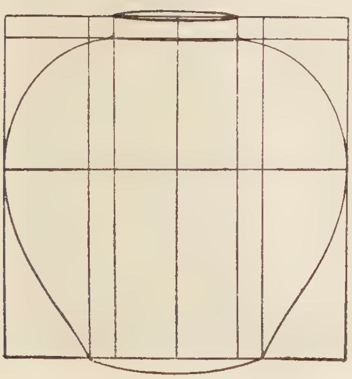
C=10, O=5, M=.50
v=2, h=2, v,h=1, t=0.

XIII.



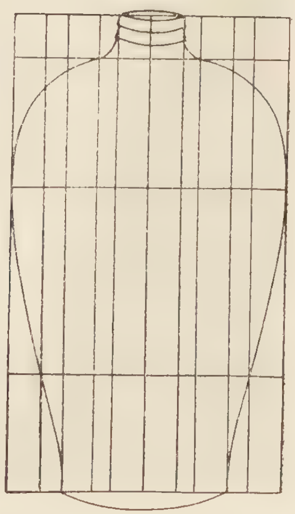
C=8, O=4, M=.50
v=1, h=1, v,h=0, t=2

VIII.



C=8, O=3, M=.37
v=0, h=2, v,h=0, t=1.

XXIII.



C=10, O=1, M=.10
v=0, h=0, v,h=0, t=1.

Fig. 3 b.

trouver des formes nouvelles qui possèdent une mesure esthétique $M$ élevée. Par exemple, le vase suivant (fig. 4) possède une mesure $M=1,$[illegible] et, [illegible] au moins

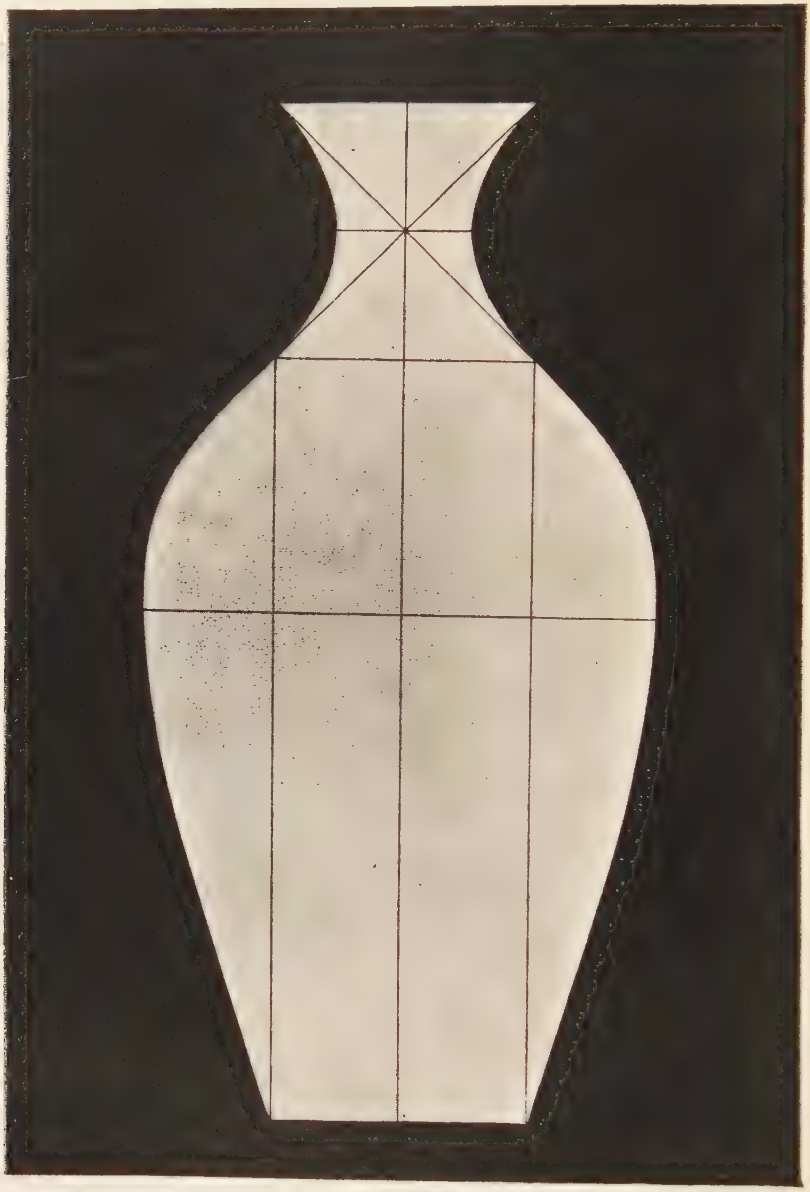


Fig. 4.

selon notre formule, est supérieur quant à sa forme aux vases chinois ci-dessus. Il serait intéressant de construire un vase cette forme.

### 6. *La poésie et les autres arts connotatifs.*

On peut employer une formule analogue pour analyser la poésie, au point de vue de l'effet musical produit par la répétition d'éléments, comme par exemple dans l'allitération.

L'importance de cet élément de répétition des sons a été signalée par le poète américain Poe, et il a même cherché à expliquer l'effet entier d'un poème de cette manière. Ses poèmes sont très remarquables à cause de leur qualité musicale, et il semble qu'il les a vraiment construits, en grande partie, selon les principes qu'il a énoncés. Les idées de Poe sur le rôle fondamental de l'ordre (ce qu'il a appelé « l'égalité ») ont été formulées par lui-même comme il suit: (1) « Examinons un cristal. Nous sommes tout de suite intéressés par l'égalité entre les côtés et entre les angles de l'une de ses faces: l'égalité des côtés nous plaît: celle des angles double le plaisir. En mettant en vue une deuxième face, à tout égard semblable à la première, ce plaisir semble être élevé au carré; en mettant en vue une troisième face il semble être élevé au troisième degré, et ainsi de suite. À vrai dire, je ne doute pas que la joie éprouvée, si elle était mesurable, serait susceptible de relations mathématiques exactes telles que celles que je suggère; au moins, jusqu'à un certain point, au-dessus duquel il y aurait une diminution dans les relations considérées ».

Sans aucun doute l'idée de Poe était purement spéculative et san aucun mérite pour fixer une mesure esthétique numérique. Néanmoins son opinion, quoique bien vague, ne diffère pas au fond de la nôtre.

Pour obtenir une formule convenable pour un poème, il faudrait mesurer la qualité musicale $O$ par des règles bien choisies. La complexité $C$ serait naturellement mesurée par le nombre des syllabes du poème.

Mais le cas de la poésie est tout à fait différent des cas simples considérés plus haut, à cause de l'importance profonde des éléments connotatifs qu'on y trouve. À vrai dire, la signification d'un poème a une importance de tout premier ordre qui est presque indépendante de l'élément musical mesurable. Il faut reconnaitre que les poèmes si remarquables de Poe ont le défaut de ne pas être très profonds dans leur signification.

Tout élément connotatif, soit dans la poésie, soit ailleurs, reste sans doute au dessus de toute analyse telle que celle que nous cherchons à faire.

D'une manière toute pareille, il existe des éléments mesurables dans la peinture. Ce côté de la peinture et du dessin décoratif ont été étudiés par Ross (2) en Amérique. Mais ici encore les éléments connotatifs sont d'une importance de tout premier ordre. Néanmoins il serait très désirable d'obtenir ici une mesure esthétique, aussi explicite que possible.

---

(1) *The Rationale of Verse.*

(2) D. Ross, *On Drawing and Painting,* Boston and New York (1912).

7. *La musique.*

Le cas de la musique pure offre le plus d'intérêt à notre point de vue. Dans la musique il n'y a pas d'éléments connotatifs importants. De plus, il y a beaucoup de relations d'ordre évidentes dans toute composition musicale. Néanmoins jusqu'ici la vraie nature de la beauté d'une mélodie simple est resté un mystère. HELMHOLZ, qui a découvert beaucoup de choses sur la nature de l'harmonie, n'a pu reussir à le faire pour expliquer les faits incontestables qui se rapportent à la mélodie. GURNEY (1), qui a étudié ce problème de la mélodie au point de vue de la forme, était convaincu que l'élément d'ordre n'est pas la chose essentielle. Il considère « une faculté musicale » spéciale qui peut juger du « mouvement idéal » qui constitue l'âme de la musique, mais il considère cette faculté musicale et ce mouvement idéal en dehors de toute explication scientifique.

Il est bien simple de démontrer que les raisonnements de GURNEY ne pénètrent pas au fond des choses. Par exemple il cite à cause de sa haute régularité une petite mélodie anglaise sans importance, « Pop goes the weasel ». Mais il ne paraît pas voir que la trivialité de cette mélodie résulte presque entièrement du retour fréquent à la note fondamentale, retour contraire à l'une des règles les plus connues de la musique.

Quant à moi, je crois que dans la mélodie c'est l'ordre qui fait tout, mais je pense à l'ordre caché aussi bien qu'à l'ordre évident.

En tout cas il existe un problème mathématique de la mélodie: *déterminer jusqu'à quel point les relations d'ordre entre les notes constituent la cause effective de la mélodie, et, de plus, trouver une mesure esthétique objective, au moins pour les mélodies simples.*

* * *

Aujourd'hui j'ai seulement esquissé un programme esthétique général. J'ai l'intention de publier prochainement un livre qui traitera ces questions systématiquement. En résumé, il s'agit de trouver les éléments d'ordre de l'objet esthétique et aussi de mesurer cet ordre, de même que la complexité de l'objet, par des moyens empiriques suggérés par les faits psychologiques. La mesure esthétique apparaît alors comme la densité de ces éléments d'ordre.

Ce point de vue mathématique à l'égard des problèmes esthétiques de l'art est évidemment tout à fait différent du point de vue philosophique. En effet, un philosophe traite ces problèmes en cherchant une formule verbale aussi générale que possible et sans aucun élément empirique. La définition de l'art comme « l'expression d'une impression », due a CROCE, est de ce genre. Si les formules philosophiques ne contiennent pas quelque chose d'empirique, elles ont le défaut de

(1) E. GURNEY, *The Power of Sound,* London (1880).

leur généralité même. Le point de vue mathématique a peu de chose en commun avec d'autres points de vue bien connus, physiques, psychologiques, biologiques et sociaux. Il diffère aussi du point de vue individualiste qui guide l'esprit créateur de l'artiste.

Pour bien voir la réalité des choses esthétiques, il ne faut s'attacher à aucun point de vue spécial, mais les considérer sous tous les angles possibles. C'est pourquoi il ne faut pas négliger le côté mathématique. J'espère que vous me pardonnerez d'avoir fait ici une communication si peu mathématique, en vue de l'importance du sujet et aussi parceque personne peut-être n'est plus capable que le mathématicien de suivre une question de forme pure.

# INDICE

## RELAZIONE DEL CONGRESSO

### PREPARAZIONE



### AUTORITÀ, COMITATI, UFFIZI, CONGRESSISTI



### PROGRAMMA E SVOLGIMENTO

## PROCESSI VERBALI DELLE SEDUTE DELLE SEZIONI



## CONFERENZE